

Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Z A M P

Journal of Applied Mathematics and Physics

Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

Editores: J. Ackeret E. Baumann P. Scherrer E. Stiefel F. Stüssi W. Traupel H. Ziegler
Redactor: R. Sängler

UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY
MAY 4 '55

INHALT - CONTENTS - SOMMAIRE

- MARBLE, F. E.: Servo-Stabilization of Low-Frequency Oscillations in Liquid Propellant Rocket Motors . . . 1
SÄNGER-BREDT, I.: Die Rolle des Adiabatenexponenten bei chemisch veränderlichen Gasgemischen . . . 35

Kurze Mitteilungen - Brief Reports - Communications brèves

- BAUMGARTNER, W., und THOMA, H. U.: Zum Stromrauschen von Halbleitern. 66
COX, H. L., and KLEIN, B.: Vibration of Isosceles Triangular Plates 68
SÄNGER, R., und SPRING, F.: Durchgang von Explosionswellen durch unterkühlte Wolken 75

- Buchbesprechungen - Book Reviews - Notices bibliographiques 76

ZAMP	Vol. VI	Fasc. 1	Pag. 1-80	25. 1. 55
------	---------	---------	-----------	-----------

Birkhäuser Verlag Basel, Schweiz

AI
37

Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik

Journal of Applied Mathematics and Physics

Journal de Mathématiques et de Physique appliquées

ZAMP

Redactor: Prof. Dr. R. Sängler, Postfach Zürich 23 (Schweiz)

ZAMP erscheint regelmässig alle zwei Monate. *Redaktionsschluss*: spätestens 8 Wochen vor Erscheinungstermin. Manuskripte und alle die Redaktion betreffenden Zuschriften sind an den Redaktor zu richten. Manuskripte für *Kurze Mitteilungen* können, falls die Autoren auf Zustellung eines Korrekturabzuges verzichten, 6 Wochen vor Erscheinungstermin eingereicht werden. Die Beiträge werden in deutscher, englischer, französischer oder italienischer Sprache publiziert, doch soll jeder *Originalarbeit* und *Kurzen Mitteilung* eine kurze Zusammenfassung in einer andern als der Originalsprache beigegeben werden. *Abbildungsvorlagen* sollen reproduktionsfertig mit Reduktionsmaßstab versehen eingeliefert werden, hingegen soll die Beschriftung nur mit Bleistift, am besten auf einem lose vorgeklebten, durchsichtigen Papier, ausgeführt werden. Autoren von Originalarbeiten mit mehr als 16 Seiten Umfang haben von der 17. Seite an einen *Beitrag an die Satzkosten* von Fr. 20.- pro Seite und von der 25. Seite an einen solchen von Fr. 35.- pro Seite zu entrichten. Die Verfasser von *Zusammenfassenden Berichten*, *Originalarbeiten* und *Kurzen Mitteilungen* erhalten 50 Gratisseparata ohne Umschlag.

ZAMP is published regularly every two months. All papers must be in the hands of the editor at least 8 weeks before publication of the issue. Manuscripts and all other correspondence concerning contributions to the periodical should be addressed to the Editor. Manuscripts of *Brief Reports* can be submitted 6 weeks before publication of the issue, if the authors dispense with proof-reading. The contributions will be published in English, German, French, or Italian; to each *Original Paper* and *Brief Report* should be added a brief summary in a language other than the original one. Drawings and photographs for *illustrations* should be sent ready for reproduction with indication of the proposed reduction; lettering on the illustrations should be entered in pencil, preferably on a loosely attached transparent sheet. Authors of *Original Papers* exceeding 16 pages are requested to pay a *contribution* of Fr. 20.- per page for pages 17-24, and of Fr. 35.- per page for pages 25 and over. The authors of *Survey Articles*, *Original Papers*, and *Brief Reports* receive 50 free separata prints without cover.

ZAMP paraît régulièrement tous les deux mois. Derniers délais pour présenter les manuscrits: deux mois avant la parution de chaque numéro. Tous les manuscrits et toute correspondance relatifs à la rédaction sont à adresser au rédacteur. Les manuscrits pour des *communications brèves* peuvent être présentés six semaines avant la parution, si les auteurs renoncent à contrôler les épreuves. Les articles seront publiés en langues française, anglaise, allemande ou italienne; cependant, chaque *article original* et toute *communication brève* devront être accompagnés d'un résumé en une autre langue. Les *illustrations* doivent être prêtes à la reproduction et il faudra y indiquer l'échelle de réduction. La légende devra être inscrite au crayon, de préférence sur papier transparent, légèrement collé à l'illustration. Pour articles originaux qui dépassent 16 pages, une *contribution* de Fr. 20.- par page doit être payée pour les pages 17-24; à partir de page 25 la contribution est de Fr. 35.- par page. Les auteurs de *comptes rendus*, ainsi que ceux d'*articles originaux* et de *communications brèves* recevront 50 tirés à part sans couverture de leur article.

Jahresabonnement (6 Nummern): Inland Fr. 38.-, Ausland sFr. 48.-, Einzelnummer Fr. 10.-

Annual subscription (6 issues): Switzerland Fr. 38.-, foreign Fr. 48.-, single copy Fr. 10.-

Abonnement annuel (6 numéros): Suisse Fr. 38.-, étranger Fr. 48.-, le numéro Fr. 10.-

Postabonnement — Post-Office Subscription — Abonnement par office postal

Belgien, Luxemburg
Italien

Dänemark
Marokko

Deutschland
Norwegen

Finnland
Portugal

Holland
Schweden

Inserate/Advertisements/Annonces: $\frac{1}{4}$ Seite/page: Fr. 165.-, $\frac{1}{2}$ Seite/page: Fr. 88.-, $\frac{1}{4}$ Seite/page: Fr. 50.-

Alle Rechte, einschliesslich der Übersetzung und Reproduktion auf photostatischem Wege oder durch Mikrofilm, vorbehalten. — All rights, incl. translations and photostatic and microfilm reproduction, reserved. — Tous droits, y compris traductions et reproductions photostatiques et par microfilm, réservés.

Copyright 1955 by Birkhäuser Verlag, Basel 10, Switzerland

Printed in Switzerland

5-256-21

Servo-Stabilization of Low-Frequency Oscillations in Liquid Propellant Rocket Motors

By FRANK E. MARBLE, Pasadena, California¹⁾

Introduction

Two points of view may be taken with regard to the undesirable pressure oscillations in rocket motors which arise from instability of combustion, acoustic resonance, coupled oscillations of chamber pressure and propellant flow rate, as well as from more obscure sources. One is to eliminate the underlying cause of instability through change in mechanical design or modification of propellant properties; this is possible when the mechanism of instability is understood and its removal is not detrimental to rocket performance. The alternative is, as was demonstrated by H. S. TSIEN [1]²⁾, to modify the system dynamics by utilizing a feedback servocontrol which, for example, senses pressure fluctuations in the combustion chamber and modifies the propellant feeding rate at the proper frequency and phase to damp the fluctuation. Servo-stabilization provides the distinct advantage that stability need not be a major concern during rocket design, relying upon the feedback system to insure stable operation. Furthermore these concepts suggest the possibility of eliminating empirically an undesirable oscillation even when its basic cause is not known.

The purpose of the present paper is to demonstrate the process of servo-stabilization by illustrating how the requirements may be met in the specific case of low frequency oscillations in liquid propellant rocket motors. The advantage of this example is that there exists a well developed theory for these oscillations, as shown, for example, in the discussions of M. SUMMERFIELD [2] and of L. CROCCO [3], and hence the removal of instability may be demonstrated analytically. The analysis of low frequency instability in monopropellant and bipropellant rocket motors is reviewed employing the Satche diagram introduced by TSIEN [1] for stability analysis of systems with time lag. Then it is shown in detail how utilizing the same diagram, the response of a simple feedback servo loop may be prescribed so as to assure stability for all values of the propellant time lag. It must be kept in mind, however, that the specific nature of the example places no restriction upon the generality of the principle.

¹⁾ Daniel and Florence Guggenheim Jet Propulsion Center, California Institute of Technology.

²⁾ Numbers in brackets refer to References, page 34.

It has been the author's privilege to prepare this extension of Professor H. S. TSIEH's original work on servostabilization of rocket motor with the benefit of frequent discussions and suggestions from Professor TSIEH.

Dynamics of the Liquid Propellant Rocket Motor

In reviewing the principles of instability in liquid propellant rocket motors it is well to consider immediately the bipropellant motor since the simple monopropellant rocket appears as a special case, the same stability criteria applying after suitable simplification. Because only low frequency oscillations are under consideration, the gas pressure at any time will be assumed uniform over the rocket combustion chamber. If the dependent variables of the system are taken to be the chamber pressure, the oxidizer flow rate and the fuel flow rate, three equations relate these quantities to each other and to the physical configuration. They are the continuity relation for the combustion chamber and two conditions of dynamic equilibrium for the fluid in the oxidizer and fuel lines. Following CROCCO's notation [2] let M_g be the mass of burned gas in the combustion chamber, \dot{m}_b the mass rate of burning, and \dot{m}_e the mass rate of ejection from the discharge nozzle. Then the relation

$$\frac{d}{dt} (M_g) = \dot{m}_b - \dot{m}_e,$$

expresses the conservation of mass. Suppose the state of the dynamic system is always close to an equilibrium value defined by $\bar{M}_g, \bar{m}_b = \bar{m}_e = \bar{m}$, then the residence time which, on the average, the burned gas spends in the chamber, is $\theta_g = \bar{M}_g / \bar{m}$. Anticipating the use of perturbation analysis, the fractional variation of burning rate and discharge rate may be introduced,

$$\mu_b = \frac{\dot{m}_b - \bar{m}}{\bar{m}} \quad \text{and} \quad \mu_e = \frac{\dot{m}_e - \bar{m}}{\bar{m}},$$

together with a dimensionless time $z = t/\theta_g$ to write the mass conservation as

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{M_g}{\bar{M}_g} \right) = \mu_b - \mu_e. \quad (1)$$

The propellant burning rate \dot{m}_b differs from the total propellant injection rate \dot{m}_i because of the combustion time lag. The time required for the transformation of propellant into products of combustion may be represented by means of the integral

$$\int_{t-\tau}^t f(p, T_g) dt' = C = \text{const} \quad (2)$$

where $f(p, T_g)$ is a function depending upon the mechanics of the process. The chief quantities upon which this function depends are p , the uniform chamber pressure and T_g , the ambient gas temperature in the neighborhood of the injector. The meaning of this integral may be clarified somewhat by thinking of f to be, for example, the rate of heat transfer to the liquid propellant, a certain total quantity C of heat being required for the complete transformation of liquid propellant to vapor. The principal quantities associated with such a heat transfer process are the ambient temperature and pressure, so that the time τ required for transformation will be large or small depending upon whether the heat transfer rate is small or large. Now if the time lag were independent of time, the fractional variation of burning rate μ_b would be identical with the fractional variation of injection rate measured at the time τ earlier. Denoting the dimensionless time lag $\tau/\theta_g \equiv \delta$, constant time lag would imply $\mu_b(z) = \mu_i(z - \delta)$. However, if the time lag is increasing during the process, the burning rate is depressed below the injection rate in proportion to the product of the propellant flow rate and the rate of change of time lag. Therefore using dimensionless quantities and neglecting a term of second order in the small variations,

$$\mu_b(z) \approx \mu_i(z - \delta) - \frac{d\delta}{dz}. \quad (3)$$

The dependence of the time lag upon time is, in reality, governed by equation (2) and differentiating this with respect to time gives,

$$f[p(t), T_g(t)] - f[p(t - \tau), T_g(t - \tau)] \left[1 - \frac{d\tau}{dt} \right] = 0. \quad (4)$$

Since it is assumed that the chamber pressure and ambient temperature vary only slightly from their steady state values, \bar{p} and \bar{T}_g , the values of f may be approximated, following TSIEN [1], through a Taylor expansion about $p = \bar{p}$, $T_g = \bar{T}_g$

$$f[p(t), T_g(t)] \approx f(\bar{p}, \bar{T}_g) + \frac{\partial f(\bar{p}, \bar{T}_g)}{\partial \bar{p}} [p(t) - \bar{p}] + \frac{\partial f(\bar{p}, \bar{T}_g)}{\partial \bar{T}_g} [T_g(t) - \bar{T}_g],$$

$$\begin{aligned} f[p(t - \tau), T_g(t - \tau)] \approx & f(\bar{p}, \bar{T}_g) + \frac{\partial f(\bar{p}, \bar{T}_g)}{\partial \bar{p}} [p(t - \tau) - \bar{p}] \\ & + \frac{\partial f(\bar{p}, \bar{T}_g)}{\partial \bar{T}_g} [T_g(t - \tau) - \bar{T}_g]. \end{aligned}$$

Upon substituting these relations into equation (4) and deleting second order differences, the variation of time lag may be expressed

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{\partial \log f(\bar{p}, \bar{T}_g)}{\partial \log \bar{p}} \left[\frac{p(t - \tau) - p(t)}{\bar{p}} \right] + \frac{\partial \log f(\bar{p}, \bar{T}_g)}{\partial \log \bar{T}_g} \left[\frac{T_g(t - \tau) - T_g(t)}{\bar{T}_g} \right]. \quad (5)$$

For a monopropellant rocket the combustion gas temperature is nearly constant, so that the second term on the right side of equation (5) vanishes. Calling $\partial \log f(\bar{p}, \bar{T}_g) / \partial \log \bar{p} \equiv n$, TSIEN's generalization of CROCCO's treatment is obtained. Considering the physical processes involved, it is likely that the value of n is less than 0.85. For the bipropellant rocket the combustion gas temperature may experience considerable variation, resulting from the variation of propellant mixture ratio, and consequently another parameter

$$\frac{\partial \log f(\bar{p}, \bar{T}_g)}{\partial \log \bar{T}_g} \equiv q$$

enters the problem. Denoting the fractional variation in chamber pressure as $\varphi = (\bar{p} - \bar{p})/\bar{p}$ and the fractional variation of injector end temperature as $\psi = (\bar{T}_g - \bar{T}_g)/\bar{T}_g$, the expression for dimensionless time lag variation is

$$\frac{d\delta}{dz} \approx n[\varphi(z - \delta) - \varphi(z)] + q[\psi(z - \delta) - \psi(z)]. \quad (6)$$

The fractional variation in total propellant injection rate μ_i , which occurs in equation (3), is most conveniently expressed in terms of the individual fractional variations of oxidizer flow, $\mu_0 = (\dot{m}_0 - \bar{\dot{m}}_0)/\bar{\dot{m}}_0$, and of fuel flow, $\mu_f = (\dot{m}_f - \bar{\dot{m}}_f)/\bar{\dot{m}}_f$, and the steady state mixture ratio $\bar{r} = \bar{\dot{m}}_0/\bar{\dot{m}}_f$. Again following CROCCO in defining $H = (\bar{r} - 1)/[2(\bar{r} + 1)]$ depending on the steady state mixture ratio, it is an elementary calculation to show that, to the first order,

$$\mu_i = \left(\frac{1}{2} + H\right) \mu_0 + \left(\frac{1}{2} - H\right) \mu_f.$$

Consequently the propellant burning rate is just

$$\left. \begin{aligned} \mu_b(z) = & \left(\frac{1}{2} + H\right) \mu_0(z - \delta) + \left(\frac{1}{2} - H\right) \mu_f(z - \delta) \\ & - n[\varphi(z - \delta) - \varphi(z)] - q[\psi(z - \delta) - \psi(z)]. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

In calculating the variation of mass flow \dot{m}_e from the nozzle, it is convenient to consider the nozzle flow as quasi-steady, that is, the flow corresponds to a time sequence of steady equilibrium flow patterns. Then the ratio of instantaneous to steady mass discharge rate is

$$\frac{\dot{m}_e}{\bar{\dot{m}}_e} = \frac{p}{\bar{p}} \left(\frac{T_g}{T_{ge}}\right)^{1/2}, \quad (8)$$

where T_{ge} is the gas temperature at the exhaust end of the combustion chamber. TSIEN has shown [4] that the quasi-steady approximation is adequate for the low frequency oscillations under discussion here. For the monopropellant

rocket, where T_{ge} is invariable, the mass discharge rate depends directly upon the combustion chamber pressure p and the fractional variation of mass discharge rate is simply $\mu_e = \varphi$. Where the variation of mixture in a bipropellant rocket causes appreciable variation of temperature this too must, according to equation (8), be accounted for in computing the rate of gas discharge. Suppose the gas temperature at the exhaust end is T_{ge} at the time t . Recalling that the gas temperature depends upon only the propellant mixture ratio, the temperature T_{ge} can be related to the injection rates of propellant which formed the gas volume. The generation of gas took place at a time θ_g earlier than the gas appeared at the nozzle end of the chamber, that is at a time $t - \theta_g$. Furthermore the time required between injection of the propellants and generation of the gas is the time lag τ . Therefore the gas temperature at the exhaust end of the chamber is that corresponding to the mixture ratio at the time $t - \tau - \theta_g$, or at the dimensionless time $z - \delta - 1$. Now, if r is the instantaneous mixture ratio, the change of gas temperature from its equilibrium value is, approximately

$$\frac{dT_g}{dr}(\bar{r})[r - \bar{r}].$$

Furthermore the variation of mixture ratio from its equilibrium value follows directly from the definition

$$r = \frac{\dot{m}_0}{\dot{m}_f} \approx r(1 + \mu_0 - \mu_f).$$

Denoting the dimensionless slope of the gas temperature curve, $d \log \bar{T}_g / d \log \bar{r}$, by $2K$, the effect of combustion gas temperature upon fractional variation of mass discharge is $K[\mu_0(z - \delta - 1) - \mu_f(z - \delta - 1)]$. Thus the complete expression is

$$\mu_e(z) = \varphi(z) - K[\mu_0(z - \delta - 1) - \mu_f(z - \delta - 1)]. \quad (9)$$

From this calculation of the effect of mixture variation upon gas temperature it is clear that $\psi = 2K(\mu_0 - \mu_f)$, and consequently equation (7) may be simplified by writing the term

$$\psi(z - \delta) - \psi(z) = 2K\{[\mu_0(z - \delta) - \mu_f(z - \delta)] - [\mu_0(z) - \mu_f(z)]\}.$$

Finally the variation of gas storage within the combustion chamber is easily found by computing the variation of $M_g = \int \rho_g dV$ with time. Since the gas density ρ_g is directly related to the temperature and uniform pressure in the combustion chamber through the equation of state, the ratio of the actual mass M_g to that value \bar{M}_g which would be there under steady conditions may be written

$$\frac{M_g}{\bar{M}_g} = \frac{p}{\bar{p}} \int \frac{\bar{T}_g}{T_g} \cdot \frac{dV}{V} \equiv [1 + \varphi(z)] \int \frac{\bar{T}_g}{T_g} \cdot \frac{dV}{V}.$$

Neglecting the product of small variations in $\varphi(z)$ and the integral,

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{M_g}{\bar{M}_g} \right) \approx \frac{d\varphi}{dz} + \frac{d}{dz} \int \frac{\bar{T}_g}{T_g} \cdot \frac{dV}{V}.$$

Now the variation of the integral arises simply from the fact that gas of temperature T_{ge} is being ejected from the exhaust end of the chamber while gas at temperature T_{gi} is being generated at the injector end. Thus the variation of the integral is simply the difference in the integrand at the two ends multiplied by the mean volume flow rate

$$\frac{d}{dz} \int \frac{\bar{T}_g}{T_g} \cdot \frac{dV}{V} \approx \left[\frac{\bar{T}_g}{T_{gi}} - \frac{\bar{T}_g}{T_{ge}} \right].$$

The gas temperatures T_{gi} and T_{ge} depend upon the local mixture ratios; more precisely, T_{gi} corresponds to the mixture ratio injected at the time $z - \delta$ while T_{ge} corresponds to that injected at $z - \delta - 1$. Then utilizing the previous calculation of the variation of gas temperature with propellant mixture ratio, it follows directly that

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dz} \left(\frac{M_g}{\bar{M}_g} \right) &= \frac{d\varphi}{dz} \\ + 2K \{ [\mu_0(z - \delta - 1) - \mu_f(z - \delta - 1)] - [\mu_0(z - \delta) - \mu_f(z - \delta)] \} & \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

Introducing equations (7), (9), and (10) in the original expression for the mass conservation in the combustion chamber, equation (1), gives this relation in terms of the desired dependent variables

$$\begin{aligned} & \frac{d\varphi}{dz} + (1 - n) \varphi + n \varphi(z - \delta) \\ & + \left\{ K \mu_0(z - \delta - 1) + \left[2K(q - 1) - \frac{1}{2} - H \right] \mu_0(z - \delta) - 2Kq \mu_0(z) \right\} \\ & - \left\{ 3K \mu_f(z - \delta - 1) + \left[2K(q - 1) + \frac{1}{2} - H \right] \mu_f(z - \delta) - 2Kq \mu_f(z) \right\} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

This description of rocket dynamics may be completed by relating the individual propellant flow rates to the proportions of the propellant supply system and the properties of the propellants. Consider the supply for each propellant to consist, Figure 1, of feeding mechanism (e.g. turbopump), a propellant supply line, an injector nozzle, and a variable capacity situated in the line so close to the injector nozzle that the inertia of fluid between the capacity and the injector nozzle may be neglected. Since the process is the same in oxidizer and fuel lines, notation differentiating the two lines will be postponed. Denote by subscript 1 conditions in the propellant line just downstream of the pump

and by 2 conditions just ahead of the injector. Following TSIEN [1], the variation of \dot{m}_1 , the pump discharge rate, from its equilibrium value may be written

$$\frac{\dot{m}_1 - \bar{\dot{m}}_1}{\bar{\dot{m}}_1} = -\frac{1}{\alpha} \cdot \frac{p_1 - \bar{p}_1}{\bar{p}_1}. \quad (12)$$

When $\alpha = \infty$ this relation indicates no response of mass flow to a change of line pressure, that is, a positive displacement system. Conversely when $\alpha = 0$,

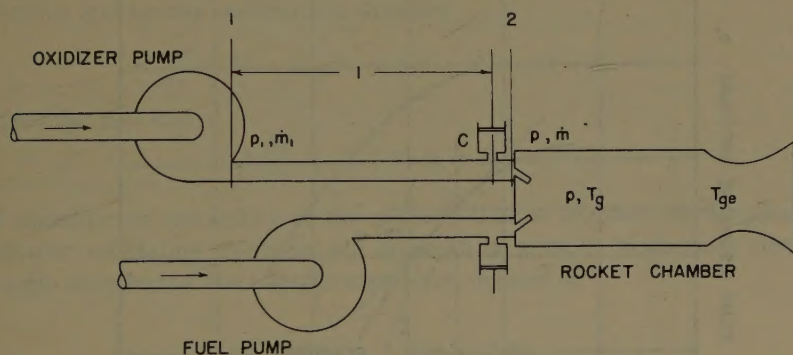


Figure 1

Schematic diagram for general bipropellant rocket.

no change of line pressure may be effected by changing the flow rate, which is characteristic of the constant pressure feed or pressurized tank. Intermediate values of α correspond to particular types of pump and if the response time of the turbopump system is very long with respect to the period of chamber pressure oscillation, the pump will operate at constant speed and α corresponds to the slope of the pump characteristic (Figure 2). The circumstance where the rotative speed of the pump may not be considered constant has been treated by Y. C. LEE, M. R. GORE, and C. C. ROSS [6], in which another degree of freedom appears in the problem, although this feature has little influence on the result.

The pressure difference $p_1 - p$ along the propellant lines is due primarily to the liquid acceleration through the injector nozzle and the inertial reaction of the fluid column in the propellant line. The frictional loss will be neglected. If S is the area of the propellant jet issuing from the injector and ρ the propellant density, the pressure difference $p_2 - p$ across the injector $\dot{m}^2/(2\rho S^2)$. Furthermore if l and A are the length and cross sectional area of the connecting line, the inertial pressure difference follows from the momentum equation

$$(p_1 - p_2) A = \frac{d}{dt} (l \dot{m}_1).$$

The mass flow \dot{m}_i through the injector may differ from the mass flow \dot{m}_1 in the connecting line because of the variable capacitance situated between the two. Since the propellant is considered incompressible, the difference of the two values of mass flow may be expressed $\dot{m} - \dot{m}_1 = dC/dt$ where C is equal to the instantaneous fluid mass contained in the capacitance. This capacitance may be represented conveniently in the dimensionless form $K = C/(\bar{m} \theta_g)$. Then if

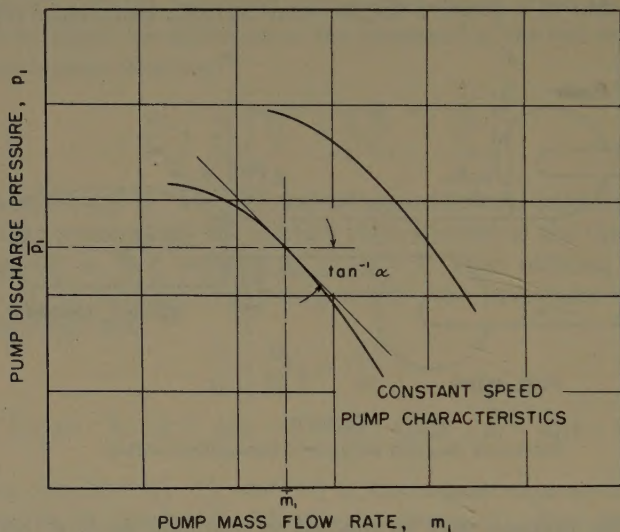


Figure 2
Approximation to constant speed pump characteristic.

the pressure drop across the propellant injector under steady operation, $\bar{m}^2/(2 \rho S^2)$, is denoted $\Delta \bar{p}$, two dimensionless parameters may be introduced; the inertia of the connecting line $J \equiv l \bar{m}/(2 \Delta \bar{p} A \theta_g)$, and the injector pressure ratio $P \equiv \bar{p}/(2 \Delta \bar{p})$. Finally eliminating variable conditions at the pump and at the capacitance, the dynamic equilibrium of a propellant line may be written

$$J \frac{d\mu}{dz} + (\zeta + 1) \mu + P \varphi + J \frac{d^2 \kappa}{dz^2} + \zeta \frac{d\kappa}{dz} = 0, \quad (13)$$

where $(P + 1/2) \alpha$ has been denoted ζ . An equation of this type holds independently for the oxidizer line and the fuel line.

In [7], R. SABERSKY has discussed the behavior of a simple system where the propellants may not be considered incompressible and consequently wave propagation along the propellant line must be accounted for. The result is, of course, that the effective inertial constant J of the propellant lines decreases as the number of nodes in the propellant line increases.

Stability of the Monopropellant Rocket

When the rocket utilizes only a single propellant and the propellant lines are of fixed capacity, the system is described by two independent variables $\varphi(z)$ and $\mu(z)$ representing the fractional variations of chamber pressure and fuel flow. The dynamics of the monopropellant rocket follows from the general description by allowing the mixture ratio to vanish so that $H \rightarrow -1/2$, $K \rightarrow 0$, and one of the variations in propellant flow vanishes. Then the two differential equations are, for the combustion chamber

$$\frac{d\varphi}{dz} + (1 - n) \varphi + n \varphi(z - \delta) - \mu(z - \delta) = 0 \quad (14)$$

and for the fuel line

$$J \frac{d\mu}{dz} + (\zeta + 1) \mu_f + P \varphi = 0. \quad (15)$$

The stability or instability of the system, that is whether the amplitude of particular oscillating solutions will diminish or grow, is most easily discussed through introducing the Laplace transform, defined as

$$\Phi(s) = \int_0^{\infty} \varphi(z) e^{-sz} dz \quad (16)$$

for the pressure fluctuation $\varphi(z)$. Similarly defining $M(s)$ as the Laplace transform of $\mu(z)$, each of the differential equations may be transformed, as shown in the Appendix, into inhomogeneous algebraic equations in the complex variable s . The inhomogeneous portion depends upon the initial conditions of the problem and hence is associated with transient solutions. The corresponding homogeneous equations

$$\left. \begin{aligned} (s + 1 - n + n e^{-s\delta}) \Phi(s) - e^{-s\delta} M(s) &= 0, \\ P \Phi(s) + (J s + \zeta + 1) M(s) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

describe the free oscillations which are of interest in the stability problem. For nontrivial solutions the determinant of the coefficients of equations (17) must vanish, that is

$$\begin{vmatrix} s + 1 - n + n e^{-s\delta} & -e^{-s\delta} \\ P & J s + \zeta + 1 \end{vmatrix} \equiv G'(s) = 0. \quad (18)$$

Equation (18) is a transcendental equation in the complex variable s , the roots of which determine the stability of rocket chamber pressure oscillations: If any root of $G'(s) = 0$ possesses a positive real part the system is unstable. To check on the existence of such roots, it is possible to apply the familiar Nyquist

criterion which traces the course of the complex function $G'(s)$ as s describes a counterclockwise contour in the right half of the s plane consisting of the imaginary axis and a large semicircle in the right half plane. Then the negative change in argument of $G'(s)$ is the difference in number of zeros and poles of in the right half s plane. Graphically this number appears as the number of complete revolutions made about the origin by the trace of $G'(s)$. If the number of poles is known independently, the number of zeros in the right half s plane is known and the stability of the system is determined.

The present problem is complicated by the time lag δ which not only makes calculation of $G'(s)$ laborious but accentuates the fact that the value of δ is usually not known accurately. To improve this situation TSIEN [1] has introduced another technique based upon a suggestion of SATCHE [8] which separates the function $G'(s)$ into two parts, the first containing $e^{-s\delta}$ as a factor, the second independent of the time lag. In the present example the separation may be effected by noting that the equation (18) may be expressed as the combination of two determinants

$$D_1(s) = \begin{vmatrix} s+1-n & 0 \\ P & Js + \zeta + 1 \end{vmatrix}, \quad (19)$$

$$D_2(s) = \begin{vmatrix} n & -1 \\ P & Js + \zeta + 1 \end{vmatrix} \quad (20)$$

such that equation (18) may be written

$$D_1(s) + e^{-s\delta} D_2(s) = 0. \quad (21)$$

Following TSIEN in calling $g_1(s) \equiv e^{-s\delta}$ and defining $g_2(s) \equiv -D_1(s)/D_2(s)$, the characteristic equation becomes

$$g_1(s) - g_2(s) \equiv G(s) = 0, \quad (22)$$

where the complex function $G(s)$ is represented as the difference of the two vectors $g_1(s)$ and $g_2(s)$.

Assume for the moment that $G(s)$ has no poles in the right halfplane. Then if s describes its previous contour the number of zeros which $G(s)$ has in the right half-plane is equal to the number of complete clockwise rotations made by a vector having its head on the trace of $g_1(s)$ and its tail on the trace of $g_2(s)$. Since all values of $g_1(s)$ lie on or within the unit circle, the vector $G(s)$ can make a complete rotation if the trace of $g_2(s)$ either passes through the unit circle or encircles the origin. Conversely if the trace of $g_2(s)$ lies outside the unit circle and does not encircle the origin, the system is definitely stable. Actually the function $G(s)$ may possess poles in the right half-plane due to zeros of the

determinant $D_2(s)$ which constitutes the denominator of $g_2(s)$. Thus the number of clockwise turns which $g_2(s)$ makes about the origin must be modified by adding the number of poles induced through the roots of $D_2(s)$. This number is found by applying the Nyquist criterion to $D_2(s)$ directly.

To illustrate the technique consider the injection rate to be constant so that $M(s) = 0$; instability under these circumstances has been denoted intrinsic instability by CROCCO [3]. The determinants degenerate; $D_1(s) = s + 1 - n$ while $D_2(s) = n$, so that

$$g_2(s) = -\left(\frac{1-n}{n}\right) - \frac{s}{n}.$$

(23)

The curve $g_2(s)$ reproduces the contour of s in the left half-plane with a scale factor $1/n$ and displaced a distance $-[(1-n)/n]$ to the left of the origin. Clearly $g_2(s)$ misses the unit circle when $(1-n)/n > 1$, that is for $0 \leq n < 1/2$; the Satche diagram is shown in Figure 3 for $n = 1/4$. When $n > 1/2$ the possi-

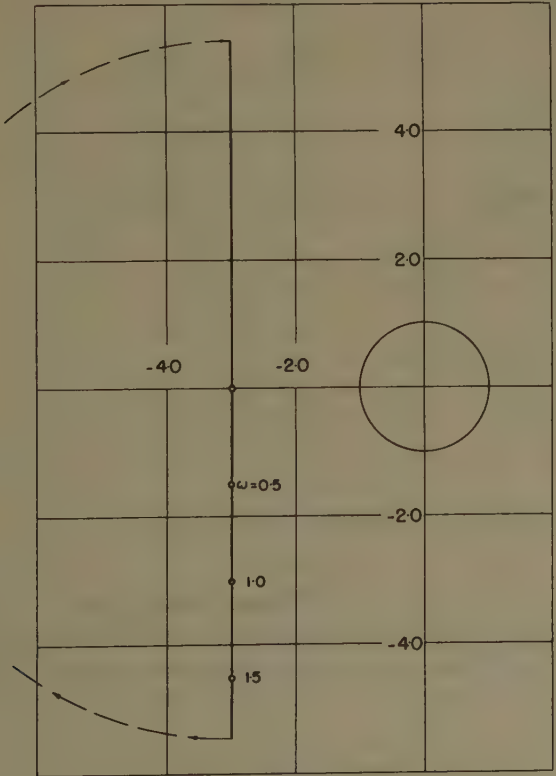


Figure 3
Satche diagram illustrating intrinsic stability, $n = 1/4$.

bility of instability shows itself through the intersection of the two curves, Figure 4, so that clearly $n = 1/2$ is the critical value of the index n describing the pressure dependence of the propellant time lag. This criterion for possible intrinsic instability may, due to its simplicity, be obtained analytically with

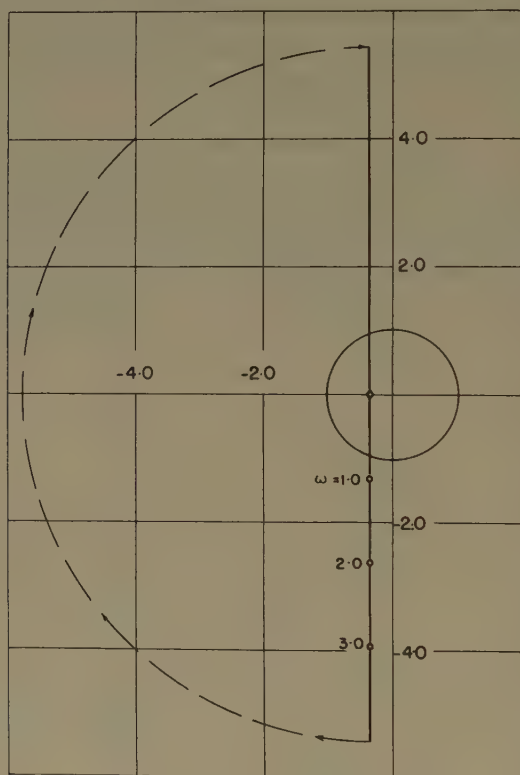


Figure 4
Satche diagram illustrating intrinsic instability, $n = 3/4$.

almost equal ease as the graphical solution. However the advantages of the technique employing the Satche diagram become more apparent when applied to more involved problems. As a second example consider the combined oscillations of chamber pressure and propellant injection rate which occur when

$$\alpha = 1, \quad P = \frac{3}{2}, \quad J = 4.0.$$

Then the general expressions for $D_1(s)$ and $D_2(s)$, given by equations (19) and

(20), lead to the relations

$$D_1(i \omega) = 3 (1 - n) - 4 \omega^2 + [4 (1 - n) + 3] i \omega$$

and

$$D_2(i \omega) = 3 \left(n + \frac{1}{2} \right) + [4 n] i \omega .$$

The curve of $g_2(i \omega)$, shown in Figure 5 for $n = 0.2$, indicates no intersection with the unit circle. To close the Satche diagram, take $s = R e^{i \theta}$ where θ decreases from $\pi/2$ to $-\pi/2$. Therefore for large values of R , $g_2(s)$ behaves as

$$\frac{-J R^2 e^{2 i \theta}}{n J R e^{i \theta}} = -\frac{R}{n} e^{i \theta} ,$$

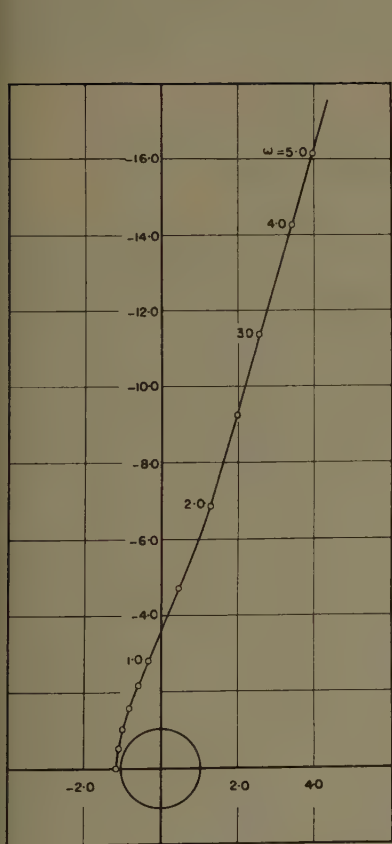


Figure 5

Satche diagram for stable monopropellant rocket; $J = 4.0$, $P = 3/2$, $\alpha = 1$, $n = 0.2$.

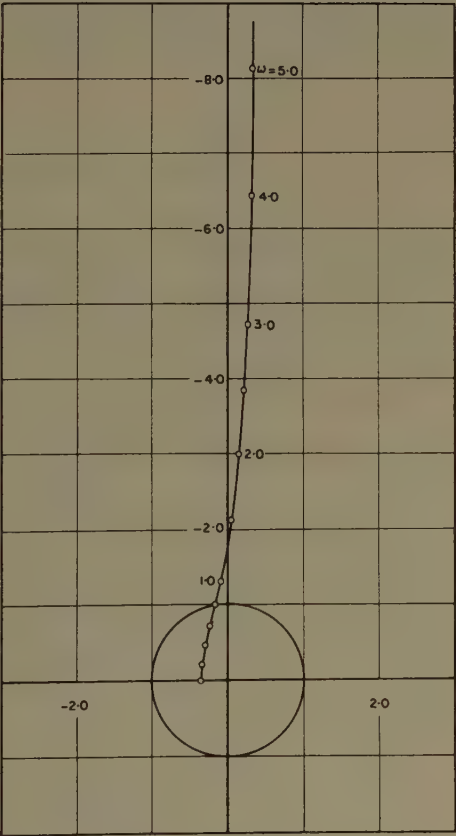


Figure 6

Satche diagram for unstable monopropellant rocket; $J = 4.0$, $P = 3/2$, $\alpha = 1$, $n = 0.6$.

so that the $g_2(s)$ curve closes by a large arc in the left half of the Satche diagram, progressing clockwise. Since $g_2(s)$ neither crosses the unit circle nor encircles the origin outside the unit circle, instability can occur only if a zero of $D_2(s)$ exists which cancels a root of $g_2(s)$ in the right half s -plane. Since $D_2(s)$ has a zero at only an imaginary value of s , this is not possible, and consequently the system is certainly stable.

When the propellant time lag index n is increased to a value of 0.6, the situation is considerably modified for, as shown in Figure 6, the possibility of low frequency oscillations is indicated by the intersection of $g_2(i\omega)$ with the unit circle. The Satche diagram closes in precisely the same manner as for the lower value of n . Therefore a rocket and propellant having parameters with these values will exhibit a low frequency instability for some range of values for the propellant time lag. The method for determining the critical time lag, above which the instability will occur, has been shown by TSIEN [1], in his original discussion of this graphical analysis.

Stability of the Bipropellant Rocket

The behavior of the bipropellant rocket motor is complicated by the additional degree of freedom associated with the second propellant line and by the periodic changes in combustion gas temperature caused by variations in mixture ratio. The system is described by three independent variables, $\varphi(z)$, $\mu_0(z)$, and $\mu_f(z)$ representing the fractional variations in chamber pressure, oxidizer and fuel flow. The three differential equations are, for the combustion chamber

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi}{dz} + (1-n)\varphi + n\varphi(z-\delta) \\ + \left\{ 3K\mu_0(z-\delta-1) + \left[2K(q-1) - \frac{1}{2} - H \right] \mu_0(z-\delta) \right. \\ \left. - 2Kq\mu_0(z) \right\} - \left\{ 3K\mu_f(z-\delta-1) + \left[2K(q-1) + \frac{1}{2} - H \right] \right. \\ \left. \times \mu_f(z-\delta) - 2Kq\mu_f(z) \right\} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

and for the oxidizer and fuel lines,

$$J_0 \frac{d\mu_0}{dz} + (\zeta_0 + 1)\mu_0 + P_0\varphi = 0, \quad J_f \frac{d\mu_f}{dz} + (\zeta_f + 1)\mu_f + P_f\varphi = 0, \quad (25)$$

Introducing the Laplace transform as before, defining $M_0(s)$ and $M_f(s)$ as the Laplace transforms of $\mu_0(z)$ and $\mu_f(z)$, each of the differential equations may be transformed as shown in the Appendix. The corresponding set of homogeneous

algebraic equations is

$$\left. \begin{aligned} [s + 1 - n + n e^{-s\delta}] \Phi(s) \\ + \left\{ e^{-s\delta} \left[K e^{-s} + 2K(q-1) - \frac{1}{2} - H \right] - 2Kq \right\} M_0(s) \\ - \left\{ e^{-s\delta} \left[K e^{-s} + 2K(q-1) + \frac{1}{2} - H \right] - 2Kq \right\} M_f(s) = 0, \\ P_0 \Phi(s) + (J_0 s + \zeta_0 + 1) M_0(s) = 0, \\ P_f \Phi(s) + (J_f s + \zeta_f + 1) M_f(s) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

and the stability of the system is determined from the roots of the characteristic equation constructed from these coefficients. Defining two third order determinants $D_1(s)$ and $D_2(s)$ as the logical extension of those given in equation (19) and (20),

$$\begin{aligned} D_1(s) &= \begin{vmatrix} s + 1 - n & 0 & -2Kq \\ P_0 & J_0 s + \zeta_0 + 1 & 2Kq \\ P_f & 0 & J_f s + \zeta_f + 1 \end{vmatrix}, \\ D_2(s) &= \begin{vmatrix} n & K e^{-s} + \left(2K(q-1) - H - \frac{1}{2} \right) & - \left[K e^{-s} + \left(2K(q-1) + H - \frac{1}{2} \right) \right] \\ P_0 & J_0 s + \zeta_0 + 1 & 0 \\ P_f & 0 & J_f s + \zeta_f + 1 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (27)$$

The characteristic equation is identically in the form given by equation (21), and the stability analysis follows in an identical fashion.

To discuss the stability of any bipropellant rocket two sets of parameters must be known; H , K , n , and q which depend upon the propellants and their mixture ratio, and P_0 , P_f , J_0 , J_f , α_0 , α_f which are associated with the propellant pumps, feed lines, and injector. In particular the parameters H , K , and probably n and q are not independent of each other; H depends upon the propellant mixture ratio and K upon the slope of the combustion temperature versus mixture ratio curve at the steady mixture ratio under consideration. For the examples to follow, these values will be taken as given in Table I for various mixture ratios.

Table I

\bar{r}	T_g ($^{\circ}\text{F}$)	$dT_g/d\bar{r}$	H	K
2.75	5065	0	0.2335	0
2.50	5010	360	0.2125	0.09
2.25	4880	640	0.1925	0.1475
2.00	4706	850	0.167	0.189

For the first examples choose the mechanical properties of the system such that

$$\alpha_0 = \alpha_f = 1.0, \quad P_0 = P_f = 1.0, \quad J_0 = 2.0, \quad J_f = 1.5$$

and consider cases corresponding to two values of the steady state mixture ratio and two values of the coefficient $n = d \log f / d \log p$, the value of q is considered to be zero. Then the values of the functions $D_1(i\omega)$ and $D_2(i\omega)$ may be computed according to the relations

$$\begin{aligned} D_1(i\omega) &= \left\{ \frac{25}{4} (1-n) - \left[\frac{35}{4} + 3(1-n) \right] \omega^2 \right\} \\ &\quad + i\omega \left\{ \frac{25}{4} + \frac{35}{4} (1-n) - 3\omega^2 \right\}, \\ D_2(i\omega) &= \left\{ \frac{25}{4} n + \frac{5}{2} + \frac{1}{2} K \omega \sin \omega - 3n\omega^2 \right\} \\ &\quad + i\omega \left\{ \frac{7}{4} (1+5n) - \frac{1}{2} (2K+H) + \frac{1}{2} K \cos \omega \right\}. \end{aligned}$$

The curves of $g_2(i\omega)$ for $n = 0.2$, calculated using these relations, are shown in Figure 7 for $\bar{r} = 2.5$ and in Figure 8 for $\bar{r} = 2.0$. They are nearly identical despite the considerable difference in mixture ratio; neither of them intersect the unit circle. Proceeding as for the monopropellant rocket, it follows that for large values of R , $g_2(R e^{i\theta})$ behaves as $-R e^{i\theta}/n$ so that the curve closes by a large arc in the left half of the Satche diagram, progressing clockwise. Furthermore the associated Nyquist diagram for $D_2(s)$, shown in Figure 9 for $n = 0.2$ and $\bar{r} = 2.50$, behaves as $n J_f J_0 R^2 e^{2i\theta}$ for large values of R . Therefore this diagram closes with a large arc of 2π radians starting from the upper branch in Figure 9 and progressing clockwise to the corresponding lower branch (not shown). Since the origin is not enclosed, the system is certainly stable. The same conclusion may be reached for the lower mixture ratio, $\bar{r} = 2.0$, $n = 0.2$. The stability curve for the corresponding example with $n = 0.6$, shown in Figure 10 for $\bar{r} = 2.5$ intersects the unit circle. Therefore a rocket propellant combination having parameters of these values will exhibit a low frequency instability for some range of time lag δ . As in the first two examples, the closing arcs in the Satche diagram and the associated Nyquist diagram for $D_2(s)$ indicate no further instability of the system.

Because the mechanical properties of the two propellant feed lines are nearly identical in the foregoing examples, the change in mixture ratio associated with an oscillation in chamber pressure is very small and the behavior is much like that of a monopropellant rocket without line elasticity. Consequently the Satche diagrams are particularly simple. The influence of mixture ratio oscillation becomes important when the two lines have different inertial con-

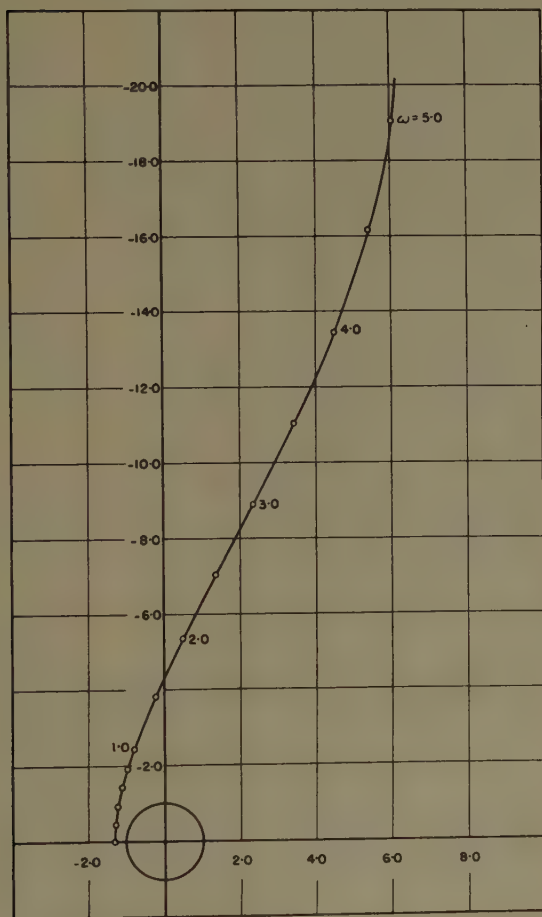


Figure 7

Satche diagram for stable bipropellant rocket; $\bar{r} = 2.5$, $n = 0.2$, $\alpha_0 = \alpha_f = 1.0$, $P_0 = P_f = 1.0$, $J_0 = 2.0$, $J_f = 1.5$.

stants and injection pressures. As an example consider a rocket for which $\alpha_0 = \alpha_f = 1.0$, $J_0 = 4.0$, $J_f = 1.0$, $P_0 = 1.0$, $P_f = 4.0$, $\bar{r} = 2.0$, $n = 0.2$.

The equations for $D_1(i\omega)$ and $D_2(i\omega)$ may be written

$$D_1(i\omega) = \left\{ \frac{55}{4} (1-n) - \left[\frac{49}{2} + 4(1-n) \right] \omega^2 \right\} \\ + i\omega \left\{ \frac{55}{4} + \frac{49}{2} (1-n) - 4\omega^2 \right\},$$

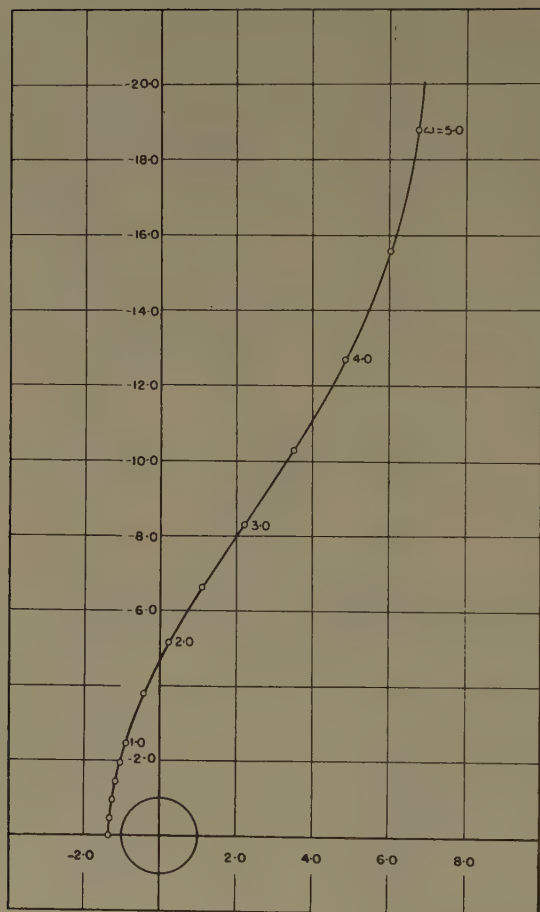


Figure 8

Satche diagram for stable bipropellant rocket; $\tilde{r} = 2.0$, $n = 0.2$, $\alpha_0 = \alpha_f = 1.0$, $P_0 = P_f = 1.0$, $J_0 = 2.0$, $J_f = 1.5$.

$$D_2(i\omega) = \left\{ \frac{55}{4} n - 4\omega^2 n + \frac{31}{4} - \frac{9}{2} (2K - H) + K \left(\frac{9}{2} \cos \omega + 15\omega \sin \omega \right) \right\} \\ + i\omega \left\{ \frac{49}{2} n + \frac{17}{2} - 15(2K + H) - K \left(15 \cos \omega - \frac{9}{2\omega} \sin \omega \right) \right\}.$$

The Satche diagram for this example, Figure 11, exhibits large loops that originate in the trigonometric terms of $D_2(i\omega)$. These terms arise because the change

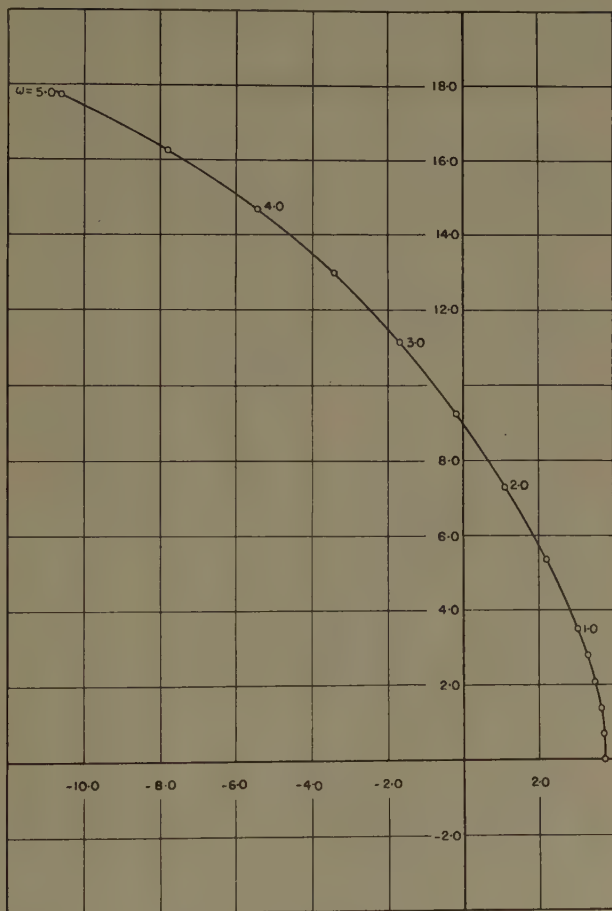


Figure 9

Nyquist diagram for $D_g(s)$ associated with Satche diagram of Figure 7.

in combustion temperature associated with a change in mixture ratio does not affect the chamber discharge rate until the residence time θ_g later; consequently this disturbance has a reduced time lag of unity. The physical phenomenon underlying the loops is easy to see. When a gas mass of low temperature, caused by a fluctuation in mixture ratio, flows to the chamber discharge nozzle the mass flow rate increases [c. f. equation (8)] causing the chamber pressure to drop. This reduction of chamber pressure induces a change in propellant flow rate with a consequent variation of mixture ratio which may lead to another negative fluctuation in gas temperature. At certain frequencies these oscilla-

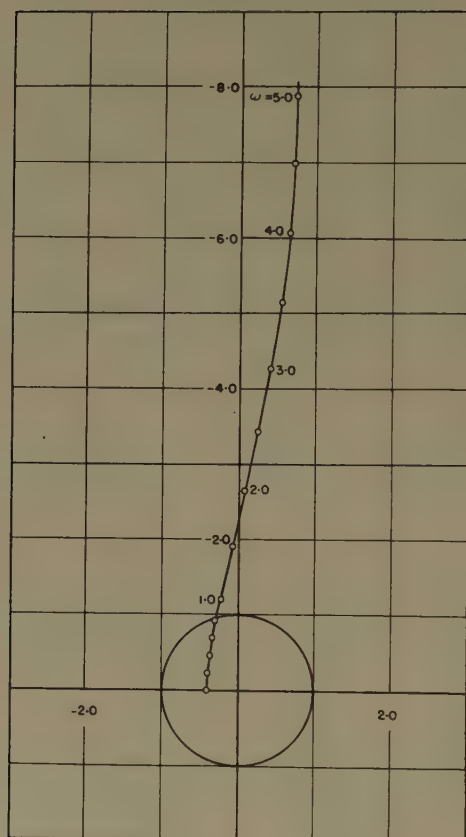


Figure 10

Satche diagram for unstable bipropellant rocket motor; $\bar{r} = 2.5$, $n = 0.6$, $\alpha_0 = \alpha_f = 1.0$,
 $P_0 = P_f = 1.0$, $J_0 = 2.0$, $J_f = 1.5$.

tions will reinforce each other so that they will, as in the case of the present calculation, be slowly damped. As pointed out by TSIEN, the Satche diagram indicates possible slowly damped oscillations when the $g_2(i\omega)$ -curve passes close to the unit circle. Furthermore it is clear that there will be an infinite number of frequencies at which such a reinforcement will take place. In the present example only two show up to any extent. The amplitude of an oscillation which originates in this manner depends to a considerable extent upon the response of the propellant feed system. If the change in pressure produces a large change in propellant flow, the oscillations may be severe; if the response is poor, the oscillation will disappear quickly. Now at high frequencies the

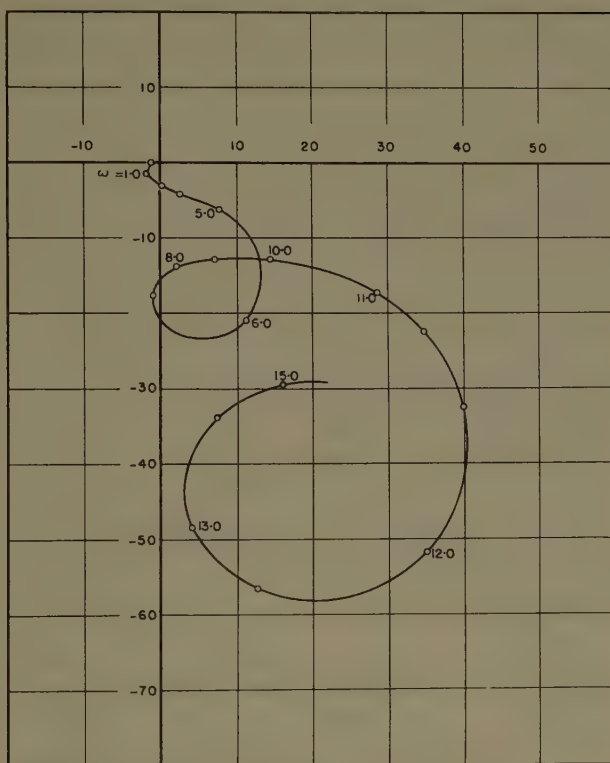


Figure 11

Satche diagram for stable bipropellant rocket motor; $\bar{r} = 2.0$, $n = 0.2$, $\alpha_0 = \alpha_f = 1.0$, $P_0 = 1.0$, $P_f = 4.0$, $J_0 = 4.0$, $J_f = 1.0$.

inertia of the propellant supply causes the amplitude of its response to decrease and consequently this particular resonance disappears. Mathematically this may be seen in the fact that for large values of ω the term $n J_0 J_f \omega^2$ governs the behavior of $D_2(s)$ whereas the trigonometric terms are at most proportional to ω .

The details of the Satche diagram near the unit circle, Figure 12, show that the curve lies outside the unit circle. The closing arc of the $g_2(s)$ -curve is the same as those discussed in previous examples. The Nyquist diagram of the denominator $D_2(s)$ is shown in Figure 13, indicating no zeros of this determinant in the right half of the s -plane and, as a consequence of this and the above considerations, the system is conclusively stable for all values of the combustion time lag.

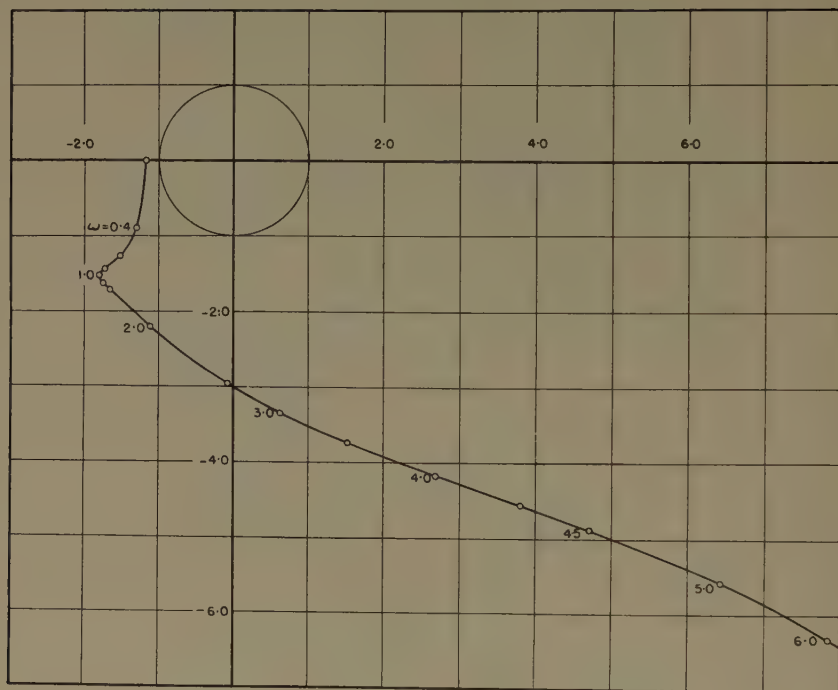


Figure 12

Details near the unit circle for Satche diagram of Figure 11.

Servo-Stabilization of Low-Frequency Oscillations

Where possible unstable operation of a rocket is indicated, stability may often be assured by modifying the mechanical design of the propellant supply system or injector, or in the extreme, by change in the chemical propellants. Alternatively the stability may be assured by introducing a feedback loop connecting the combustion chamber and the variable capacitances in each propellant line. In the simplest case for the monopropellant rocket, Figure 14, the loop will consist of a pressure measuring device attached to the rocket chamber, an amplifier, and an appropriate servomechanism to actuate the capacitances in the propellant lines. With this scheme the capacitance κ will vary with time in a manner prescribed according to the variation in chamber pressure. Employing a dimensionless form, the correspondence between capacitance and chamber pressure variations may be written

$$\kappa(z) = F\left(\frac{d}{dz}\right) \varphi(z), \quad (29)$$

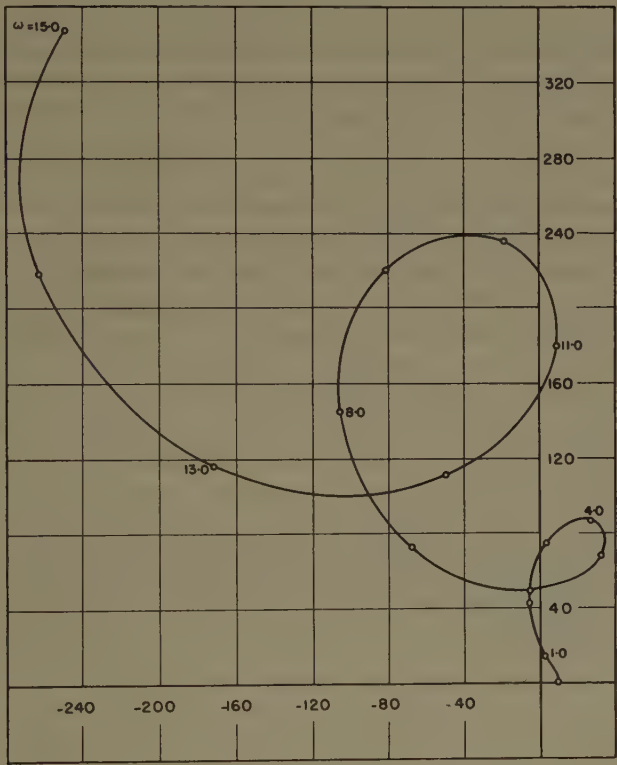


Figure 13
Nyquist diagram for $D_2(s)$ associated with Satche diagram of Figure 11.

where $F(d/dz)$ is a linear differential-integral operator. This relation simply indicates that the capacitance and the chamber pressure are connected through

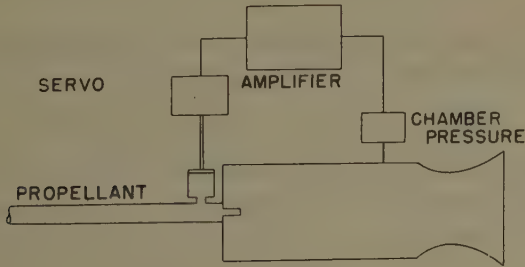


Figure 14
Schematic diagram of monopropellant rocket incorporating feedback system.

a linear differential relation with constant coefficients, the form of which depends upon the pressure pickup, the amplifier and the servomechanism. The problem is then to design the feedback circuit, that is to determine the form of $F(d/dz)$, such that stable rocket operation is achieved. In a practical case this resolves to the design of an amplifier to work with a given pressure pickup and a given servocontrol so as to produce the required form of F .

An adequate form for F can be determined only through a stability analysis of the entire rocket system with feedback loop, the behavior of this system is described by equation (14) for the rocket chamber, equation (13) for the propellant line, and a relation of the type equation (29) for the feedback loop. The homogeneous portions of the Laplace transform of these equations are

$$\left. \begin{aligned} [s + 1 - n + n e^{-s\delta}] \varphi(s) - e^{-s\delta} M(s) &= 0, \\ P \varphi(s) + [Js + \zeta + 1] M(s) + [Js^2 + \zeta s] K(s) &= 0, \\ F(s) \varphi(s) - K(s) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

where $K(s)$ is the Laplace transform of $\kappa(z)$, the variable capacitance; $F(s)$ is the transfer function of the feedback loop. The stability of the system is dependent upon the roots of the third order determinant constructed from the coefficients of equations (30),

$$\begin{vmatrix} s + 1 - n + n e^{-s\delta} & -e^{-s\delta} & 0 \\ P & Js + \zeta + 1 & Js^2 + \zeta s \\ F(s) & 0 & -1 \end{vmatrix}. \quad (31)$$

It is most convenient to expand this in terms of second-order minors using the last row for the expansion. Then defining a new second-order determinant

$$D(s) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ Js + \zeta + 1 & Js^2 + \zeta s \end{vmatrix} \quad (32)$$

the characteristic equation obtained by setting the stability determinant [equation (31)] to zero is just

$$D_1(s) + e^{-s\delta} [D_2(s) + F(s) D(s)] = 0,$$

where $D_1(s)$ and $D_2(s)$ are those corresponding determinants which are appropriate for the monopropellant rocket without the feedback loop. Then calling

$$g_2(s) = - \frac{D_1(s)}{D_2(s) + F(s) D(s)}, \quad (33)$$

the stability analysis is reduced to that corresponding to equation (22).

Stable rocket operation is to be assured by choosing a form of the feedback transfer function $F(s)$ so that the Satche diagram satisfies the criteria previously discussed. The direct procedure discussed by TSIEN [1] is to choose a simple stable Satche diagram and solve for the feedback transfer function. In some cases, in particular for the bipropellant rocket, this procedure leads to a form for $F(s)$ which is not a rational function and hence is not conveniently realizable. The basic difficulty here is that an excessive amount of information has been prescribed by fixing the entire Satche diagram, the necessary conditions for constructing a stable Satche diagram are actually simpler. Clearly it is necessary to be assured that $g_2(0)$ lie to the left of the unit circle, that is $g_2(0) < -1$. Then since the curve $g_2(i\omega)$ has always a vertical tangent at $\omega = 0$, it is necessary that the curvature be sufficiently small that $g_2(i\omega)$ does not pass into the unit circle as s increases. In most cases, this may be guaranteed by leaving the curvature and scale of the Satche diagram at $\omega = 0$ unchanged by the feedback circuit. Finally it must be assured that the diagram does not misbehave for large values of ω ; it must not loop about so that it passes through or around the unit circle at high frequencies. This condition may be satisfied in general by arranging that the feedback system leaves the original Satche diagram uninfluenced for large frequencies. This is easily done by designing the amplifier to be unresponsive at high frequencies, that is the amplifier shall 'cut out' at high frequencies. These features may be incorporated into a rather simple transfer function for the feedback loop which is sufficient to eliminate instability.

From equation (32) it is observed that $D(s)$ behaves as s for small values of s so that in order to change the value of $g_2(0)$ by choosing $F(s)$ it is necessary, according to equation (33), that $F(s) \sim 1/s$ for small values of s . Furthermore the conditions that the scale and curvature of the Satche diagram be unchanged near $\omega = 0$ requires that in the power series expansion for $F(s)$ $D(s)$, the coefficients of s and s^2 vanish. These conditions may be met by choosing $F(s)$ to be of the form

$$F(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{a + b s}{(1 - c^2 s^2)^2}, \quad (34)$$

where a, b, c are constants and $F(\omega) \sim 1/\omega^4$ for large values of ω and hence cuts out with sufficient rapidity. Then clearly the expansion for

$$D(s) F(s) \equiv \frac{(a + b s) (J s + \zeta)}{(1 - c^2 s^2)^2}$$

can have the coefficient of s vanish only if $a + b s$ is proportional to the conjugate of $J s + \zeta$, that is $a + b s = f (-J s + \zeta)$ where f is a new constant. Then furthermore the expansion for

$$D(s) F(s) = f \frac{-J^2 s^2 + \zeta^2}{(1 - c^2 s^2)^2}$$

can have a zero coefficient of s^2 only if $-J^2 + 2c^2\zeta^2 = 0$ so that the constant c is just

$$c = \frac{J}{\sqrt{2}\zeta}. \quad (35)$$

Finally the number f may be fixed by setting the value of $g_2(0)$, for at $s = 0$

$$g_2(0) = -\frac{D_1(0)}{D_2(0) + f\zeta^2} = -\frac{(1-n)(\zeta+1)}{n(\zeta+1) - P + f\zeta^2}.$$

Thus if it is desired to make $g_2(0)$ a certain prescribed value $-\gamma$ where $\gamma > 1$, then the final constant f is just

$$f = \frac{1 - (\gamma + 1)n}{\gamma} \left[\frac{1}{\zeta} + 1 \right] + \frac{P}{\gamma\zeta^2}. \quad (36)$$

For the unstable monopropellant rocket considered, where $\alpha = 1$, $P = 3/2$, $J = 4.0$, and $n = 0.6$, the actual value of the feedback transfer function is easily found to be

$$F(s) = -\frac{1.25}{s} \cdot \frac{1 - 2.03s^2}{[1 - (2.42s)^2]^2}$$

where γ has been arbitrarily set at the value 1.50. The corresponding Satche diagram, Figure 15, indicates that the rocket is stable against low-frequency oscillations for all values of the time lag.

For the bipropellant rocket the general approach to the problem of servo-stabilization is the same and the actual mechanisms are only slightly more involved. In the most general case, two variable capacitances, Figure 16, are involved and it will be assumed that each is provided with its own feedback transfer function.

$$\kappa_0(z) = F_0\left(\frac{d}{dz}\right) \varphi(z), \quad (37)$$

$$\kappa_f(z) = F_f\left(\frac{d}{dz}\right) \varphi(z), \quad (38)$$

and the problem is then to determine forms of F_0 and F_f to assure stable operation of the rocket by submitting the full set of equations describing the chamber pressure, dynamic equilibrium of each propellant line, and each feedback circuit to a stability analysis. As shown in the Appendix, the set of algebraic relations obtained after application of the Laplace transform is

$$\left. \begin{aligned} [s + 1 - n + ne^{-s\delta}] \varphi(s) + e^{-s\delta} \left[-3Ke^{-s} - \left(-2K + H + \frac{1}{2} \right) \right] M_0(s) \\ - e^{-s\delta} \left[-3Ke^{-s} - \left(-2K + H - \frac{1}{2} \right) \right] M_f(s) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

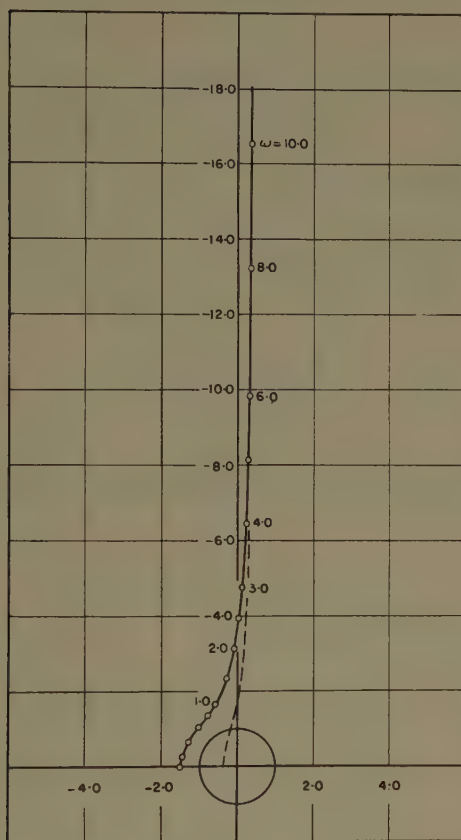


Figure 15

Stable Satche diagrams for monopropellant rocket obtained using simple criteria on feedback loop.

$$\left. \begin{aligned}
 P_0 \varphi(s) + [J_0 s + 1 + \zeta_0] M_0(s) + [J_0 s^2 + \zeta_0 s] K_0(s) &= 0, \\
 P_f \varphi(s) + [J_f s + 1 + \zeta_f] M_f(s) + [J_f s^2 + \zeta_f s] K_f(s) &= 0, \\
 F_0(s) \varphi(s) - K_0(s) &= 0, \\
 F_f(s) \varphi(s) - K_f(s) &= 0,
 \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

where $K_0(s)$ and $K_f(s)$ are the Laplace transforms of the variable capacitances; $F_0(s)$ and $F_f(s)$ are the transfer functions of the feedback loops. The stability of the system is determined by the roots of the fifth order determinant construc-

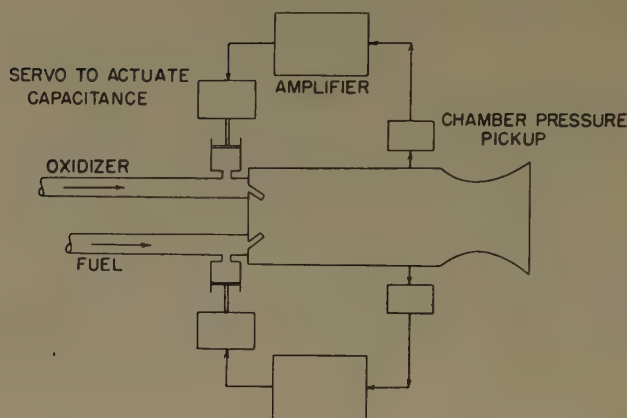


Figure 16

Schematic diagram of bipropellant rocket motor incorporating a general feedback system.

ted from the coefficients of equations (39),

$$\left| \begin{array}{cccc}
 s + 1 - n + n e^{-s\delta} & e^{-s\delta} \left[K e^{-s} - \left(2K + H + \frac{1}{2} \right) \right] & & \\
 P_0 & J_0 s + 1 + \zeta_0 & & \\
 P_f & 0 & & \\
 F_0(s) & 0 & & \\
 F_f(s) & 0 & & \\
 -e^{-s\delta} \left[K e^{-s} - \left(2K + H - \frac{1}{2} \right) \right] & 0 & 0 & \\
 0 & J_0 s^2 + \zeta_0 s & 0 & \\
 J_f s + 1 + \zeta_f & 0 & J_f s^2 + \zeta_f s & \\
 0 & -1 & 0 & \\
 0 & 0 & -1 &
 \end{array} \right| \quad (40)$$

This determinant is most conveniently expressed through expansion by second-order minors, employing the last two rows for the expansion. Defining two new

third-order determinants

$$D_0(s) = \left\{ \begin{array}{cc} K e^{-s} - \left(2K + H + \frac{1}{2} \right) & \\ J_0 s + 1 + \zeta_0 & \\ 0 & \end{array} \right\} \quad (41)$$

$$- \left\{ \begin{array}{cc} \left[K e^{-s} - \left(2K + H - \frac{1}{2} \right) \right] & 0 \\ 0 & J_0 s^2 + \zeta_0 s \\ J_f s + 1 + \zeta_f & 0 \end{array} \right\},$$

$$D_f(s) = \left\{ \begin{array}{cc} K e^{-s} - \left(2K + H + \frac{1}{2} \right) & \\ J_f s + 1 + \zeta_f & \\ 0 & \end{array} \right\} \quad (42)$$

$$- \left\{ \begin{array}{cc} \left[K e^{-s} - \left(2K + H - \frac{1}{2} \right) \right] & 0 \\ 0 & J_f s^2 + \zeta_f s \\ J_0 s + 1 + \zeta_0 & 0 \end{array} \right\}$$

the characteristic equation obtained by setting the stability determinant [equation (40)] to zero is

$$D_1(s) + e^{-s\delta} [D_2(s) + F_0(s) D_0(s) + F_f(s) D_f(s)] = 0. \quad (43)$$

The transfer functions of the two feedback loops, $F_0(s)$ and $F_f(s)$ appear as multiplicative factors; each of the determinants depends upon only the original rocket configuration and is independent of the feedback circuit. The new form of the function $g_2(s)$ is

$$\frac{-D_1(s)}{D_2(s) + F_0(s) D_0(s) + F_f(s) D_f(s)}, \quad (44)$$

so that clearly as much flexibility may be expected by stabilizing with one propellant line as with both. Therefore it will be supposed, arbitrarily, that the feedback servo will vary only the flow of oxidizer. This means that $F_f(s) \equiv 0$ in the present formulation so that the problem becomes very similar to the monopropellant case and may be treated in the same manner.

From the expression for $D_0(s)$, equation (41), it appears still proper to choose $F_0(s)$ to behave as $1/s$ for small values of s and hence it is appropriate

to assume again

$$F_0(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{a + b s}{[1 - c^2 s^2]^2} \quad (45)$$

together will the criteria that for small values of s , the scale and curvature of $g_2(s)$ remain unchanged. It is sufficient then to make the coefficients of s and s^2 vanish in the expansion of $F_0(s) D_0(s)$ for small values of s . For small s , the determinant $D_0(s)$ may be expressed in the series

$$D_0(s) = d_0^{(1)} s + d_0^{(2)} s^2 + d_0^{(3)} s^3 + \dots, \quad (46)$$

where

$$\left. \begin{aligned} d_0^{(1)} &= \left(K + H + \frac{1}{2} \right) \zeta_0 (1 + \zeta_f), \\ d_0^{(2)} &= \left(K + H + \frac{1}{2} \right) [J_0 (1 + \zeta_f) + J_f \zeta_0] + K \zeta_0 (1 + \zeta_f), \\ d_0^{(3)} &= \left(K + H + \frac{1}{2} \right) J_0 J_f + K [J_0 (1 + \zeta_f) + J_f \zeta_0] - \frac{1}{2} K \zeta_0 (1 + \zeta_f), \\ d_0^{(4)} &= K J_0 J_f - \frac{1}{2} K [J_0 (1 + \zeta_f) + J_f \zeta_0] + \frac{1}{6} K \zeta_0 (1 + \zeta_f). \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Then as for the monopropellant rocket, the dependence upon s may be eliminated by writing $a + b s = f (d_0^{(1)} - d_0^{(2)} s)$. Then $F_0(s) D_0(s)$ becomes

$$F_0(s) D_0(s) = \frac{f (d_0^{(1)} - d_0^{(2)} s) (d_0^{(1)} + d_0^{(2)} s + d_0^{(3)} s^2 + \dots)}{(1 - c^2 s^2)^2}, \quad (48)$$

so that in order for the coefficient of s^2 to vanish, c^2 must be chosen

$$c^2 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{d_0^{(2)}}{d_0^{(1)}} \right)^2 - \frac{d_0^{(3)}}{d_0^{(1)}} \right], \quad (49)$$

Then, finally, the value of f must be chosen so as to insure that

$$g_0(0) \equiv -\gamma < -1$$

and this is determined by equation (44), to be

$$D_2(0) + f (d_0^{(1)})^2 = \gamma,$$

so that

$$f = -\frac{1}{(d_0^{(1)})^2} \left[D_2(0) - \frac{1}{\gamma} D_1(0) \right]. \quad (50)$$

These results then determine completely the form of the feedback transfer function required to stabilize a liquid bipropellant rocket against low-frequency oscillation of the type described.

Consider, as an example, the unstable bipropellant rocket with parameters having the values,

$$a_u = a_f = 1.0, \quad P_0 = P_f = 1.0, \quad J_0 = 2.0, \quad J_f = 1.5, \quad \bar{r} = 2.5, \quad n = 0.6,$$

which was analyzed previously and whose Satche diagram is shown in Figure 10. From these values it is easily determined that

$$\bar{d}_0^{(1)} = 3.01, \quad \bar{d}_0^{(2)} = 6.15, \quad \bar{d}_0^{(3)} = 2.89$$

and consequently

$$a = 3.01, \quad b = -6.15, \quad c^2 = 1.60.$$

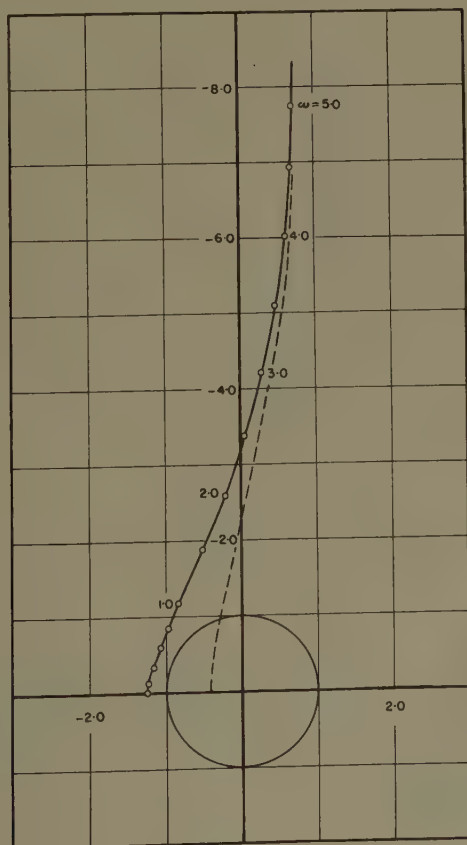


Figure 17

Satche diagram for stabilized bipropellant rocket obtained using simple criteria for feedback loop.

Finally the value of f may be calculated from equation (5)

$$f = -0.62,$$

so that the final form for the transfer function of the feedback loop is

$$F_0(s) = -\frac{0.62}{s} \cdot \frac{(3.01 - 6.15 s)}{(1 - 1.6 s^2)^2}. \quad (51)$$

The modified Satche diagram may then be computed from equation (44) using $F_f(s) \equiv 0$ and $F_0(s)$ as given above. The resulting diagram, Figure 17, shows the rocket to be definitely stable against oscillation of the type discussed.

Concluding Remarks

The analysis which has been presented demonstrates that a quite simple feedback servo loop may be devised to insure stability for any case of low frequency or 'chugging' oscillation in monopropellant or bipropellant rocket motors. Likewise it may safely be inferred that a similar solution may be achieved in other cases of coupled oscillations, even though the design of an appropriate feedback circuit may have to be approached empirically. In fact it must be emphasized that the general principle of servostabilization remains regardless of the detailed mechanism of instability, so that even if the present theories of low frequency instability must be modified in the light of further experience, servostabilization of chamber pressure oscillations is still appropriate. At frequencies above the 'chugging' range, when wave propagation along the length of the rocket chamber must be accounted for, the problem of sensing the oscillations will require more care than that which has been described. Likewise the control of propellant injection may become a problem when the frequencies are increased. However, it is not strictly necessary to actuate the variable capacitance at the same frequency as the oscillation to be stabilized, for the oscillation may be suppressed effectively by damping it only every two or three cycles. Thus by extending the concepts of H. S. TSIEN to such a nonlinear feedback loop, the frequency response of the capacitance may be relaxed considerably. Furthermore the fact that values for the pressure sensitivity of the propellant time lag are not generally known is no obstacle, since the feedback circuit may be designed quite conservatively without difficulty. It appears, therefore, that servostabilization must be considered as a natural component of the rocket, amalgamated with the control system. Realization of this potential benefit depends essentially upon proper engineering balance between mechanical simplicity and electronic elegance.

Appendix

Laplace Transform of the Rocket Stability Equations

The equation describing the combustion chamber pressure oscillation is

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi}{dz} - (1-n)\varphi + n\varphi(z-\delta) \\ + \left[K\mu_0(z-\delta-1) - \left(2K+H+\frac{1}{2} \right) \mu_0(z-\delta) \right] \\ - \left[K\mu_f(z-\delta-1) - \left(2K+H-\frac{1}{2} \right) \mu_f(z-\delta) \right] = 0, \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

while the equations of motion for the liquid in the oxidizer and fuel lines are

$$J_0 \frac{d\mu_0}{dz} + (\zeta_0 + 1) \mu_0 + P_0 \varphi + J_0 \frac{d^2 \kappa_0}{dz^2} + \zeta_0 \frac{d\kappa_0}{dz} = 0, \quad (53)$$

$$J_f \frac{d\mu_f}{dz} + (\zeta_f + 1) \mu_f + P_f \varphi + J_f \frac{d^2 \kappa_f}{dz^2} + \zeta_f \frac{d\kappa_f}{dz} = 0. \quad (54)$$

Denoting the Laplace transforms of $\varphi(z)$, $\mu_0(z)$, $\mu_f(z)$, $\kappa_0(z)$, and $\kappa_f(z)$ by $\Phi(s)$, $M_0(s)$, $M_f(s)$, $K_0(s)$, and $K_f(s)$ respectively, the transformation of equations (52), (53), and (54) is straightforward except for the terms involving a time lag. In general the transform of $f(z-\delta)$ will be

$$\begin{aligned} \int_0^\infty f(z-\delta) e^{-sz} dz &= \int_{-\delta}^\infty e^{-s\delta} f(z-\delta) e^{-s(z-\delta)} d(z-\delta) \\ &= e^{-s\delta} F(s) + e^{-s\delta} \int_{-\delta}^0 f(\xi) e^{-s\xi} d\xi, \end{aligned}$$

where $F(s)$ is the transform of $f(z)$. As is well known, when the variable is retarded the transform is modified through multiplication by an exponential factor $e^{-s\delta}$ and by the addition of an integral extending over the period of the time lag. The equations then transform to

$$\left. \begin{aligned} [s+1-n+n e^{-s\delta}] \Phi(s) + e^{-s\delta} \left[K e^{-s} - \left(2K+H+\frac{1}{2} \right) \right] M_0(s) \\ - e^{-s\delta} \left[K e^{-s} - \left(2K+H-\frac{1}{2} \right) \right] M_f(s) \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

$$\left. \begin{aligned}
 &= \varphi(0) - n e^{-s\delta} \int_{-\delta}^0 \varphi(\xi) e^{-s\xi} d\xi - K e^{-s(1+\delta)} \int_{-1-\delta}^0 [\mu_0(\xi) - \mu_f(\xi)] e^{-s\xi} d\xi \\
 &\quad + (2K + H) e^{-s\delta} \int_{-\delta}^0 [\mu_0(\xi) - \mu_f(\xi)] e^{-s\xi} d\xi \\
 &\quad + \frac{1}{2} e^{-s\delta} \int_{-\delta}^0 [\mu_0(\xi) + \mu_f(\xi)] e^{-s\xi} d\xi,
 \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

$$\left. \begin{aligned}
 &[J_0(s) + 1 + \zeta_0] M_0(s) + P_0 \Phi(s) + [J_0 s^2 + \zeta_0 s] K_0(s) \\
 &= J_0 \mu_0(0) + J_0 \frac{d\kappa_0}{dz}(0) + [J_0 s + \zeta_0] \kappa_0(0),
 \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

$$\left. \begin{aligned}
 &[J_f(s) + 1 + \zeta_f] M_f(s) + P_f \Phi(s) + [J_f s^2 + \zeta_f s] K_f \\
 &= J_f \mu_f(0) + J_f \frac{d\kappa_f}{dz}(0) + [J_f s + \zeta_f] \kappa_f(0),
 \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

where ζ_0 and ζ_f have been employed to denote

$$\left[P_0 + \frac{1}{2} \right] \alpha_0 \quad \text{and} \quad \left[P_f + \frac{1}{2} \right] \alpha_f$$

respectively. Stability analysis requires only the left-hand sides of these equations. Transient behavior of the rocket system, however, is determined by the complete equations where the right hand sides, in usual problems, consist in the initial conditions of the dependent variables. For systems with time lag, such as the liquid propellant rocket, equations (55), (56), and (57) show that in addition to initial conditions evaluated at $z = 0$, certain features of the behavior of the system must be known for a period preceding $z = 0$ equal in duration to the time lag. Physically this is clear, for due to the combustion time lag the variation of chamber pressure $\varphi(z)$ can not be described for $z > 0$ unless the behavior of the propellant flow is known for the period $-\delta \leq z \leq 0$.

REFERENCES

- [1] H. S. TSIEN, *Servo-Stabilization of Combustion in Rocket Motors*, J. Amer. Rocket Soc. 22, ... (1952).
- [2] M. SUMMERFIELD, *A Theory of Unstable Combustion in Liquid Propellant Rocket Motors*, J. Amer. Rocket Soc. 21, 108-114 (1951).
- [3] L. CROCCO, *Aspects of Combustion Stability in Liquid Propellant Rocket Motors*, J. Amer. Rocket Soc. 21, 163-178 (1951); 22, 7-16 (1952).
- [4] H. S. TSIEN, *Transfer Functions of Rocket Nozzles*, J. Amer. Rocket Soc. 22, 139-143 (1952).

- [5] FRANK E. MARBLE and DALE W. COX, Jr., *Servo-Stabilization of Low Frequency Oscillations in a Liquid Bipropellant Rocket Motor*, J. Amer. Rocket Soc. 23, 63–74 (1953).
- [6] Y. C. LEE, M. R. GORE, and C. C. ROSS, *Stability and Control of Liquid Propellant Rocket Systems*, J. Amer. Rocket Soc. 23, 75–81 (1953).
- [7] ROLF H. SABERSKY, *Effect of Wave Propagation in Feed Lines on Low Frequency Rocket Instability*, J. Amer. Rocket Soc. (in press).
- [8] M. SATCHE, *Discussion of a paper by H. I. Ansoff*, J. App. Mech. (ASME) 16, 419–420 (1949).

Zusammenfassung

Die Theorie der kleinen Frequenz-Instabilität von Raketenmotoren mit flüssigen Treibmitteln wird überarbeitet, wobei im besonderen die Methode der Satche-Diagramme erörtert wird, welche durch H. S. TSIEN für Stabilitätsrechnungen linearer Systeme mit zeitlicher Verzögerung eingeführt worden sind. Das Prinzip der Stabilisierung durch Benutzung einer Gegenkopplungsschleife wird besprochen, und es wird gezeigt, dass schon eine sehr einfache Lösung des Gegenkopplungskreises die Stabilität von flüssigen Einzel- und Doppeltreibmitteln in Raketenmotoren versichern kann, unabhängig von der Grösse der Zeitverzögerung. Auf Grund des beschriebenen speziellen analytischen Beispiels wird gefolgert, dass solche Stabilisierungsmassnahmen für eine viel grössere Klasse von Instabilitäten in Raketenmotoren als die betrachtete empirisch verwirklicht werden können.

(Received: February 2, 1954.)

Die Rolle des Adiabatenexponenten bei chemisch veränderlichen Gasgemischen

VON IRENE SÄNGER-BREDT, Paris¹⁾

Übersicht

Der in der klassischen Gasdynamik so fruchtbare Begriff des «Adiabatenexponenten» als des Verhältnisses der spezifischen Wärmen bei konstantem Druck und bei konstantem Volumen verliert bei thermodynamischen Strömungen bisweilen an Sinn, da die in den Strömungsgleichungen vorkommenden *einheitlichen* κ -Werte sich bei Wegfallen bestimmter einschränkender Voraussetzungen als durchaus verschiedenen Ursprungs und verschiedener Grösse erweisen, worüber man sich bei der Handhabung dieser sehr geläufigen Formeln nicht immer Rechenschaft gibt.

Unter «einschränkenden Voraussetzungen» sind hier die Bedingungen *konstanter spezifischer Wärmen* der einzelnen Gase und *konstanter Partialdruckverhältnisse* der Gasgemische verstanden.

¹⁾ Arsenal de l'Aéronautique, Châtillon-sous-Bagneux (France).

Solange sich die Strömungstechniker vorzugsweise mit kalter oder schwach aufgeheizter Luft befassten, waren beide Einschränkungen berechtigt und sehr zweckmässig. Bei hohen Strömungs-Mach-Zahlen der Luft oder bei strömenden Feuergasen jedoch, besonders in den Expansionsdüsen von Raketen oder in durch Kernenergie aufgeheizten Maschinen, trifft keine der beiden Voraussetzungen mehr zu. Die durch Vernachlässigung dieser Tatsache verursachten Abweichungen der Rechnung von den wirklichen Verhältnissen liegen bei Temperaturen über 2000°K , insbesondere bei kleinen Gasdrücken, bereits ausserhalb der Grenzen des Zulässigen.

Von solchen Gesichtspunkten ausgehend, veröffentlichte G. KLOBE [1]¹⁾ vor wenigen Jahren für übliche Feuergase mit Temperaturen bis zu 3500°K eine – im Strömungsabschnitt zwischen Ofen und engstem Düsenquerschnitt global brauchbare – Näherungsmethode, wie sie zur Behandlung von Strömungsfragen in Raketen nach Art der A 4 verwendet wurde. Bei dieser Darstellung war unter anderem die Veränderlichkeit der spezifischen Wärmen vernachlässigt.

In der folgenden Abhandlung wird nun versucht, den Einfluss jeder der beiden einschränkenden Zusatzbedingungen systematisch und getrennt zu erfassen sowie anschliessend verallgemeinerte Gleichungen aufzustellen, die auch bei Wegfall einer oder beider Einschränkungen gültig sind und aus denen die klassischen Strömungsgesetze als Sonderfälle hervorgehen. Untersucht werden wiederum nur Strömungen idealer Gase. Es werden für differentielle Entspannungsgefälle streng gültige Isentropenexponenten abgeleitet, deren sachgemässe Benützung die formelle Weiterverwendung der klassischen Adiabatengleichungen (und damit aller daraus abgeleiteten Strömungsbeziehungen) auch bei chemisch veränderlichen Strömungen gestattet. Es wird ferner gezeigt, dass diese Isentropenexponenten nur im Grenzfall unveränderlicher Partialdruckverhältnisse mit dem Verhältnis $\kappa = C_p/C_v$ übereinstimmen. Endlich wird noch die Anwendbarkeit klassischer oder halbklassischer Adiabatenexponenten in Fällen bestimmter, nicht im Gleichgewicht befindlicher Strömungen erläutert.

Die Ergebnisse der Untersuchungen werden an dem einfachen Beispiel eines nach dem Reaktionsschema $X_2 \rightleftharpoons 2 X$ veränderlichen Gasgemisches mit den Zahlenwerten des Wasserstoffs veranschaulicht.

I. Völlig eingefrorene oder «klassische» Strömung

In ihren Beziehungen für isentropische Entspannung setzt die klassische Strömungslehre bekanntlich temperaturunabhängige spezifische Wärmen C_p bzw. C_v und unveränderliche Partialdruckverhältnisse p_i/p oder Molbrüche n_i der strömenden Gase voraus.

Unter diesen einschränkenden Zusatzbedingungen gibt es in der allgemeinen Gaszustandsgleichung drei veränderliche Zustandsgrössen: 1. den Druck

¹⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis auf Seite 65.

p [kg/m²], 2. die volumspezifische Masse oder Dichte [kg s²/m⁴] und 3. die Temperatur T [° K].

Jeweils zwei davon, in zweckentsprechender Wahl, können als unabhängige Veränderliche angesehen werden. Ausgehend von der Zustandsgleichung eines Gemisches von z idealen Gasen,

$$p = \frac{\varrho g R T}{M} \quad [\text{kg/m}^2], \quad (1)$$

bzw. von einer einzelnen Gemischkomponente mit dem Partialdruck p_i , dem Molekulargewicht M_i und der partiellen¹⁾ Dichte ϱ_i ,

$$p_i = \frac{\varrho_i g R T}{M_i}, \quad (1a)$$

worin

$$p = \sum_{i=1}^z p_i, \quad M = \sum_{i=1}^z \frac{p_i}{p} M_i \quad \text{und} \quad \varrho = \varrho_i \frac{\sum_{i=1}^z \frac{p_i}{p} M_i}{\frac{p_i}{p} M_i}$$

Gesamtdruck, mittleres Molekulargewicht und Dichte der Gasmischung bedeuten, lautet das vollständige Differential:

$$\frac{dp}{p} = \frac{dT}{T} + \frac{d\varrho}{\varrho} \quad (2)$$

bzw.

$$\frac{dp_i}{p_i} = \frac{dT}{T} + \frac{d\varrho_i}{\varrho_i}. \quad (2a)$$

Ausserdem wird bei konstantem Partialdruckverhältnis die Differenz der molaren spezifischen Gemischwärmen:

$$\left. \begin{aligned} C_p - C_v &= \frac{d(H-U)}{dT} = \frac{d \left[\sum_{i=1}^z \frac{p_i}{p} \left(\int_0^T C_{p_i} dT - \int_0^T C_{v_i} dT \right) \right]}{T} \\ &= \sum_{i=1}^z \frac{p_i}{p} (C_{p_i} - C_{v_i}) = \sum_{i=1}^z \frac{p_i}{p} A R = A R \quad [\text{kcal/}^\circ\text{kmol}]. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

R [mkg/°kmol] bezeichnet hierin die allgemeine Gaskonstante,

H [kcal/kmol] die Enthalpie,

U [kcal/kmol] die innere Energie und

A [kcal/mkg] das mechanische Wärmeäquivalent.

¹⁾ Das heisst die Dichte, die das Gas hätte, wenn es im eingenommenen Raum $v = M/g \varrho$ allein wäre.

Die Entropie eines Gasgemisches in einem offenen Kessel bei konstant bleibendem Kesseldruck p beträgt:

$$s = \int_0^{p, T, q} \frac{dq}{T} = \int_0^{p, T, q} \frac{dU + A dA}{T \sum_{i=1}^z n_i M_i} = \frac{\sum_{i=1}^z n_i S_i}{\sum_{i=1}^z n_i M_i} \quad [\text{kcal}/^\circ\text{kg}], \quad (4)$$

worin

$$S_i = S_0^{\text{Gas}} + C_{p_i} \int_0^T \frac{dT}{T} - A R \int_0^{p_i} \frac{dp}{p} \quad (4a)$$

$$= S_0^{\text{Gas}} + C_{v_i} \int_0^T \frac{dT}{T} - A R \int_0^{q_i} \frac{dq}{q} \quad [\text{kcal}/^\circ\text{kmol}] \quad (4b)$$

ist¹⁾.

Hierin bedeutet der Index 0 den «Basis»-Zustand bei $p_i = 1$ at, $T = 298,2^\circ\text{K}$ und $q_i = M_i/24,79$ kg s²/m⁴; worin M_i das Gewicht der Gaskomponente i in [kg/kmol] bezeichnet. Unter

$$S_{0_i}^{\text{Gas}} = S_{0_i}^{\text{Gas}} - A R \ln\left(\frac{gR}{M_i}\right)$$

ist die Integrationskonstante verstanden, das heisst der konventionelle Entropiewert für ideales Gas im «Basis»-Zustand.

Die Bedingungen, unter denen die Entropie konstant bleibt, ergeben sich durch Nullsetzen des totalen Differentials von Gleichung (4), also

$$\left. \begin{aligned} ds_{p, T} &= \frac{\sum_{i=1}^z n_i}{\sum_{i=1}^z n_i M_i} \left[\left(\frac{\partial S_i}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial S_i}{\partial p} \right)_T dp \right] \\ &= \frac{\sum_{i=1}^z n_i}{\sum_{i=1}^z n_i M_i} \left[+ C_{p_i} \frac{dT}{T} - A R \frac{dp}{p} \right] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5a)$$

¹⁾ Die molare Entropie S_i jedes einzelnen Gemischbestandteiles i würde – bei gleichen Zustandsgrössen p , T und q wie die des Gemisches – für sich allein

$$S_i^* = S_{0_i}^{\text{Gas}} + C_{p_i} \int_0^T \frac{dT}{T} - A R \int_0^p \frac{dp}{p} = S_{0_i}^{\text{Gas}} + C_{v_i} \int_0^T \frac{dT}{T} - A R \int_0^q \frac{dq}{q}$$

beträgen. Gleichung (4a, b) berücksichtigt die bei Vermischung unter Konstanthaltung des Gesamtvolumens vor und nach der Mischung, $\sum_{i=1}^z v_i = v$, auftretende zusätzliche Gemischentropie

$$\Delta S^* = -A R \sum_{i=1}^z n_i \ln n_i.$$

oder

$$\left. \begin{aligned} ds_{\varrho, T} &= \frac{\sum_{i=1}^z n_i}{\sum_{i=1}^z n_i M_i} \left[\left(\frac{\partial S_i}{\partial T} \right)_{\varrho} dT + \left(\frac{\partial S_i}{\partial \varrho} \right)_T d\varrho \right] \\ &= \frac{\sum_{i=1}^z n_i}{\sum_{i=1}^z n_i M_i} \left[+ C_{v_i} \frac{dT}{T} - A R \frac{d\varrho}{\varrho} \right] = 0 \end{aligned} \right\} \quad (5b)$$

oder

$$\left. \begin{aligned} ds_{p, \varrho} &= \frac{\sum_{i=1}^z n_i}{\sum_{i=1}^z n_i M_i} \left[\left(\frac{\partial S_i}{\partial \varrho} \right)_p d\varrho + \left(\frac{\partial S_i}{\partial p} \right)_{\varrho} dp \right] \\ &= \frac{\sum_{i=1}^z n_i}{\sum_{i=1}^z n_i M_i} \left[- C_{p_i} \frac{d\varrho}{\varrho} + C_{v_i} \frac{dp}{p} \right] = 0, \end{aligned} \right\} \quad (5c)$$

je nachdem man (p, T) , (ϱ, T) oder (p, ϱ) als unabhängige Veränderliche wählt. Die Bedingung konstanter Gemischentropie $ds = 0$ enthält ohne weiteres die Bedingung adiabatischer Zustandsänderung $dQ = dU + A dA = 0$, welche – allein betrachtet – nicht unbedingt reversible Prozesse vorschreibt. In den Gleichungen (5a) bis (5c) betrug die differentielle Zunahme der inneren Energie pro Kilomol des Systems: $dU = C_v dT$; die differentielle Enthalpiezunahme: $dH = C_p dT$ und die bei einer differentiellen Zustandsänderung pro Kilomol geleistete reversible Arbeit $dA = p dv = - (RT/M) d\varrho/\varrho$; dQ ist die dem System pro Kilomol zugeführte Wärme.

Aus den Gleichungen (5a) bis (5c) folgen die Beziehungen:

$$\frac{dp}{p} = \frac{C_p}{AR} \cdot \frac{dT}{T}, \quad (6a)$$

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{C_v}{AR} \cdot \frac{dT}{T} \quad (6b)$$

und

$$\frac{dp}{p} = \frac{C_p}{C_v} \cdot \frac{d\varrho}{\varrho}, \quad (6c)$$

wenn man die Ausdrücke $C_p = \sum_{i=1}^z n_i C_{p_i}$ und $C_v = \sum_{i=1}^z n_i C_{v_i}$ als mittlere spezi-

fische Wärmen des Gemisches pro Kilomol einführt. Diese drei Differentialgleichungen lassen sich im Fall konstanter spezifischer Wärmen integrieren, so dass man unter Verwendung von Gleichung (3):

$$p T^{-\kappa/(\kappa-1)} = \text{const}, \quad (7a)$$

$$p T^{-1/(\kappa-1)} = \text{const} \quad (7b)$$

und

$$p \varrho^{-\kappa} = \text{const} \quad (7c)$$

daraus erhält.

Dabei hat man für das Verhältnis der spezifischen Wärmen

$$\frac{(\partial H / \partial T)_p}{(\partial U / \partial T)_v} = \frac{T (\partial S / \partial T)_p}{T (\partial S / \partial T)_v} = \frac{C_p}{C_v}$$

die Abkürzung κ eingeführt. Man pflegt κ , da es die Beziehungen zweier Zustandsgrößen bei adiabatischer Zustandsänderung bestimmt, als den Adiabatenexponenten zu bezeichnen. Alle adiabatisch isentropen Zustandsänderungen zwischen p und T , ϱ und T sowie zwischen p und ϱ sind reine Funktionen von κ , wenn sowohl spezifische Wärmen als auch Partialdruckverhältnisse in der Gasmischung für konstant angesehen werden können.

Diese Art von Strömung dürfte unter Gleichgewichtsbedingungen nur bei tiefen Temperaturen, bei denen die Veränderlichkeit der spezifischen Wärmen vernachlässigbar wird, und bei gleichzeitig hinreichend hohen Drucken, bei denen die Dissoziation verschwindet, verwirklicht sein. Sie ist auch dann vorhanden, wenn eine Entspannung so schnell vor sich geht, dass weder der veränderliche Anteil der spezifischen Wärmen noch die Dissoziation den Zustandsänderungen zu folgen vermögen. In diesem Fall sind die im Kessel herrschenden spezifischen Wärmen für die Entspannung verantwortlich. Die Strömung ist jedoch unter diesen Umständen zwar noch adiabatisch, jedoch nur scheinbar isentropisch, da die Differentialgleichungen (5a) bis (5c) dann nur noch ein Rechenverfahren darstellen, das eine Zuordnung verschiedener Zustandsgrößen bei verschiedenen Entspannungsstadien ermöglicht, die wirklichen Entropiedifferentiale aber entsprechend den späteren Ausführungen des Abschnitts III gebildet werden müssten.

II. Strömung mit eingefrorenen chemischen Gleichgewichten und veränderlichen, trägheitslosen spezifischen Wärmen

Wenn nur die erste der beiden eingangs genannten einschränkenden Zusatzbedingungen hinfällig wird, das heisst, wenn man temperaturabhängige spezifische Wärmen mit ständiger, unverzüglicher Gleichgewichtsanpassung annimmt, so kann man unter Benützung der Planckschen Zustandssumme Z bekanntlich

[2], [3] die molaren freien Energien F , freien Enthalpien G , Enthalpien H , inneren Energien U , Entropien S und damit auch die spezifischen Wärmen C_p und C_v der einzelnen Gemischkomponenten i als Funktionen ihrer Zustandssumme ausdrücken:

$$F_i - (F_i^{\text{Gas}})_{0^\circ\text{K}} = -A R T \ln Z_i; \quad (8a)$$

$$G_i - (G_i^{\text{Gas}})_{0^\circ\text{K}} = -A R T (\ln Z_i - 1) = \Delta F_i + A R T; \quad (8b)$$

$$U_i - (U_i^{\text{Gas}})_{0^\circ\text{K}} = +A R T^2 \left[\frac{\partial(\ln Z_i)}{\partial T} \right]_e; \quad (9a)$$

$$H_i - (H_i^{\text{Gas}})_{0^\circ\text{K}} = +A R T \left\{ T \left[\frac{\partial(\ln Z_i)}{\partial T} \right]_e + 1 \right\} = \Delta U_i + A R T; \quad (9b)$$

$$\left. \begin{aligned} S_i - (S_i^{\text{Gas}})_{0^\circ\text{K}} &= +A R \left[\frac{\partial(T \ln Z_i)}{\partial T} \right]_e \\ &= A R \left\{ \ln Z_i + T \left[\frac{\partial(\ln Z_i)}{\partial T} \right]_e \right\} = -\frac{F}{T} + \frac{U}{T}; \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

sowie endlich

$$C_{v_i} = A R T \left\{ \left[\frac{\partial(\ln Z_i)}{\partial T} \right]_e + \left[\frac{\partial\{T [\partial(\ln Z_i)/\partial T]_e\}}{\partial T} \right]_e \right\} \quad (11)$$

und

$$C_{p_i} = A R \left\{ T \left\{ \left[\frac{\partial(\ln Z_i)}{\partial T} \right]_e + \left[\frac{\partial\{T [\partial(\ln Z_i)/\partial T]_e\}}{\partial T} \right]_e \right\} + 1 \right\} = C_{v_i} + A R. \quad (12)$$

In diesen Gleichungen beziehen sich die Konstanten $(F_i^{\text{Gas}})_{0^\circ\text{K}}$, $(G_i^{\text{Gas}})_{0^\circ\text{K}}$, $(U_i^{\text{Gas}})_{0^\circ\text{K}}$, $(H_i^{\text{Gas}})_{0^\circ\text{K}}$ und $(S_i^{\text{Gas}})_{0^\circ\text{K}}$ auf gasförmigen Zustand bei $T = 0^\circ\text{K}$; sie enthalten also unter anderem die gesamten Umwandlungsenergien vom festen auf den gasförmigen Zustand.

Die Bestimmungsgleichungen (6a), (6b) und (6c) für isentrope Zustandsänderung können mit Hilfe der Gleichungen (11) und (12) dann in folgender Form geschrieben werden:

$$\frac{dp}{p} = \sum_{i=1}^z n_i \left\{ \left\{ 1 + T \left\{ \left[\frac{\partial(\ln Z_i)}{\partial T} \right]_e + \left[\frac{\partial\{T [\partial(\ln Z_i)/\partial T]_e\}}{\partial T} \right]_e \right\} \right\} \right\} \frac{dT}{T}, \quad (13)$$

$$\frac{dQ}{Q} = \sum_{i=1}^z n_i T \left\{ \left[\frac{\partial(\ln Z_i)}{\partial T} \right]_e + \left[\frac{\partial\{T [\partial(\ln Z_i)/\partial T]_e\}}{\partial T} \right]_e \right\} \frac{dT}{T} \quad (14)$$

und

$$\frac{dp}{p} = \frac{\sum_{i=1}^z n_i \left\{ \left\{ 1 + T \left\{ \left[\frac{\partial(\ln Z_i)}{\partial T} \right]_e + \left[\frac{\partial\{T [\partial(\ln Z_i)/\partial T]_e\}}{\partial T} \right]_e \right\} \right\} \right\}}{\sum_{i=1}^z n_i T \left\{ \left[\frac{\partial(\ln Z_i)}{\partial T} \right]_e + \left[\frac{\partial\{T [\partial(\ln Z_i)/\partial T]_e\}}{\partial T} \right]_e \right\}} \cdot \frac{dQ}{Q}. \quad (15)$$

Beispielsweise für ein einheitliches, zweiatomiges Gas mit vollangeregter Rotation, einer einzigen Normalschwingung und mit vernachlässigbarem Beitrag der Elektronenanregung zur spezifischen Wärme, dessen Zustandssumme also

$$Z = Z^S Z^R Z^{Tr} = \left\{ \frac{e^{\Theta_s/T}}{e^{\Theta_s/T} - 1} \right\} \left[\left(\frac{\Theta_R}{T} \right)^{-1} \right] \left[\left(\frac{2\pi M}{h^2 g N_L} \right)^{3/2} \left(\frac{RT}{N_L} \right)^{5/2} \frac{e}{p} \right] \quad (16)$$

$$= \left[\frac{e^{\Theta_s/T}}{e^{\Theta_s/T} - 1} \right] \left[\left(\frac{\Theta_R}{T} \right)^{-1} \right] \left[\left(\frac{2\pi RT}{h^2 N_L} \right)^{3/2} \left(\frac{M}{g N_L} \right)^{5/2} \frac{e}{\varrho} \right]$$

wäre, lauteten im besonderen die einzelnen Entropieanteile der Schwingungs-, Rotations- und Translationsfreiheitsgrade:

$$\dot{S}^S = AR \left\{ \ln \frac{e^{\Theta_s/T}}{e^{\Theta_s/T} - 1} + \frac{\Theta_s/T}{e^{\Theta_s/T} - 1} \right\}, \quad (16a)$$

$$\dot{S}^R = AR \left\{ -\ln \frac{\Theta_R}{T} + 1 \right\} \quad (16b)$$

und

$$\dot{S}^{Tr} = AR \left\{ \ln \frac{(2\pi M/g)^{3/2} (eR)^{5/2}}{h^3 N_L^4} + \frac{5}{2} \ln T - \ln p \right\} \quad (16c)$$

in Druckabhängigkeit bzw.

$$\dot{S}_\varrho^{Tr} = AR \left\{ \ln \frac{(2\pi R)^{3/2} (eM/g)^{5/2}}{h^3 N_L^4} + \frac{3}{2} \ln T - \ln \varrho \right\} \quad (16d)$$

in Abhängigkeit von der Dichte dargestellt.

Damit schrieben sich die Gleichungen (13) bis (15) in diesem Sonderfall:

$$\frac{dp}{p} = \left[\frac{7}{2} + \left(\frac{\Theta_s}{T} \right)^2 \frac{e^{\Theta_s/T}}{(e^{\Theta_s/T} - 1)^2} \right] \frac{dT}{T} = \frac{7}{2} \cdot \frac{dT}{T} + \frac{d\dot{S}^S}{AR}, \quad (13a)$$

$$\frac{d\varrho}{\varrho} = \left[\frac{5}{2} + \left(\frac{\Theta_s}{T} \right)^2 \frac{e^{\Theta_s/T}}{(e^{\Theta_s/T} - 1)^2} \right] \frac{dT}{T} = \frac{5}{2} \cdot \frac{dT}{T} + \frac{d\dot{S}^R}{AR} \quad (14a)$$

und

$$\frac{dp}{p} = \frac{\frac{7}{2} + \left(\frac{\Theta_s}{T} \right)^2 \frac{e^{\Theta_s/T}}{(e^{\Theta_s/T} - 1)^2}}{\frac{5}{2} + \left(\frac{\Theta_s}{T} \right)^2 \frac{e^{\Theta_s/T}}{(e^{\Theta_s/T} - 1)^2}} \cdot \frac{d\varrho}{\varrho} = \frac{\frac{7}{2} \cdot \frac{dT}{T} + \frac{d\dot{S}^S}{AR}}{\frac{5}{2} \cdot \frac{dT}{T} + \frac{d\dot{S}^R}{AR}} \cdot \frac{d\varrho}{\varrho}. \quad (15a)$$

In der Zustandssumme bedeuteten:

M das Molekulargewicht des Gases,

h das Plancksche Wirkungsquantum,

N_L die Zahl der Gasteilchen pro Kilomol,

e die Basis der natürlichen Logarithmen und

Θ_R bzw. Θ_s die charakteristischen Temperaturen für die Rotations- bzw. Schwingungsanregung.

Die Gleichungen (13a) bis (15a) sind integrierbar:

$$\ln p - \ln(T^{7/5}) + \frac{S}{AR} = \text{const}, \quad (13b)$$

$$\ln \varrho - \ln(T^{5/2}) + \frac{S}{AR} = \text{const} \quad (14b)$$

und

$$\ln p - \ln(\varrho^{7/5}) - \frac{2}{5} \cdot \frac{S}{AR} = \text{const}; \quad (15b)$$

jedoch lässt sich T nicht mehr explizit darstellen, und die dem Poissonschen Gesetz, $\ln p - \kappa \ln \varrho = \text{const}$, entsprechende Beziehung (15b) hat ein gemischtes Zusatzglied

$$- \frac{2}{5} \cdot \frac{S}{AR} = f\left(\frac{p}{\varrho}\right)$$

erhalten. Die klassischen Adiabatangleichungen (7a) bis (7c) lassen sich indes formal weiterverwenden, wenn man – von den Differentialgleichungen (13) bis (15) ausgehend –

$$\kappa_T = \frac{\sum_{i=1}^z n_i T \left\{ \left[\frac{\partial(\ln Z_i)}{\partial T} \right]_e + \left[\frac{\partial\{T [\partial(\ln Z_i)/\partial T]_e\}}{\partial T} \right]_e \right\} + 1}{\sum_{i=1}^z n_i T \left\{ \left[\frac{\partial(\ln Z_i)}{\partial T} \right]_e + \left[\frac{\partial\{T [\partial(\ln Z_i)/\partial T]_e\}}{\partial T} \right]_e \right\}} \quad (17)$$

definiert und der Verlauf von κ_T über T bzw. über p/ϱ für ein betrachtetes Gasgemisch zahlenmässig bekannt ist. Für die Schallgeschwindigkeit im ruhenden Gas gilt dann beispielsweise weiterhin streng: $a^2 = \kappa_T p/\varrho$, während die Entspannungsbeziehungen (7a) bis (7c) mit Mittelwerten $\kappa_{T_1 T_2}$ zu benutzen sind, die im Iterationsverfahren bestimmt werden müssen.

Die Strömung mit veränderlichen spezifischen Wärmen, aber noch völlig eingefrorenen chemischen Gleichgewichten, die von E. SÄNGER und dem Verfasser bereits in früheren Arbeiten [4], [5] behandelt wurde, ist um so eher verwirklicht, je rascher eine Entspannung – von völligem Gleichgewicht im Kessel ausgehend – erfolgt. In der Raketentechnik ist sie bei Kurzdüsen am ehesten zu erwarten. Überall da, wo diese Art von Strömung unter Nicht-Gleichgewichtsverhältnissen auftritt, gilt bezüglich ihrer Entropie eine entsprechende Aussage, wie sie am Schluss von Abschnitt I für die völlig eingefrorene Strömung vermerkt war.

Die Gleichungen (9) bis (12) liessen noch erkennen, dass die mittleren spezifischen Wärmen $C_{pOT} = H/T$ und $C_{vOT} = U/T$ nicht mehr gleich den örtlichen Werten C_{pT} und C_{vT} sind. Man muss deshalb bei allen Strömungsbeziehungen, insbesondere beispielsweise bei der Zeunerschen Gleichung für die Ausström-

geschwindigkeit w_M aus einer Düse, den Unterschied zwischen mittleren und örtlichen spezifischen Wärmen sowie zwischen den aus ihnen abgeleiteten κ -Werten beachten, der in den klassischen gasdynamischen Formeln verwischt ist. Hierauf wurde bereits an anderer Stelle [6] ausführlicher eingegangen.

III. Chemisch veränderliche isentrope Strömung

Diese Art von Strömung, bei der sowohl die Veränderlichkeit der Partialdruckverhältnisse aller Gemischbestandteile als auch die Veränderlichkeit ihrer spezifischen Wärmen berücksichtigt werden müssen, tritt überall auf, wo Energieinhalt der inneren Freiheitsgrade und chemische Gleichgewichte sich unverzüglich den wechselnden Zustandsbedingungen anpassen können. Sie erfordert die allgemeinste Form der Strömungsgleichungen, von der die in Abschnitt I und II dargestellten Gesetzmässigkeiten als Sonderfälle ableitbar sind.

Wir beschränken uns in dieser grundsätzlichen Abhandlung der übersichtlichen Schreibweise zuliebe auf die Darstellung von homogenen Systemen idealer Gase mit nur *einer* möglichen Reaktion,

$$\sum_{k=1}^{\alpha} \nu_k X_k + W_0 \rightleftharpoons \sum_{i=1}^{\omega} \nu_i X_i,$$

mit α Komponenten im energieärmeren Zustand *vor* der Reaktion und ω Komponenten *nach* aufgenommener Reaktionswärme. Grundsätzlich lassen sich jedoch alle weiteren Rechnungen auch durchführen für Systeme von Gasen mit mehreren möglichen chemischen Reaktionen, seien es Moleküldissoziationen, Rekombinationen oder Ionisationen, wenn man ausser den Molbrüchen n_i der einzelnen Gase noch die Atomdruckbilanzen¹⁾ in die Rechnung einführt. Die einzelne Reaktion sei gekennzeichnet durch:

die Gleichgewichtskennzahl

$$\ln K_p = \sum_{i=1}^{\omega} \nu_i \ln p_i - \sum_{k=1}^{\alpha} \nu_k \ln p_k, \quad (18a)$$

die maximale Molzunahme (das heisst Molzunahme bei völligem Umsatz)

$$\Delta \nu = \sum_{i=1}^{\omega} \nu_i - \sum_{k=1}^{\alpha} \nu_k, \quad (18b)$$

die Reaktionsenergie²⁾)

$$\Delta U \equiv W_0 = \sum_{i=1}^{\omega} \nu_i U_i - \sum_{k=1}^{\alpha} \nu_k U_k + W_0, \quad (18c)$$

¹⁾ Über den Begriff «Atomdruck» siehe E. SCHMIDT [7], S. 487.

²⁾ Hierin bedeutet W_0 die nach erfolgter Reaktion bei 0 °K vom System pro $\sum_{k=1}^{\alpha} \nu_k M_k$ aufgenommene Reaktionswärme.

die Reaktionsenthalpie

$$\Delta H \equiv W_p = \sum_{i=1}^{\omega} \nu_i H_i - \sum_{k=1}^{\alpha} \nu_k H_k + W_0 = \Delta U + \Delta \nu A R T, \quad (18c)$$

die Reaktionsentropie

$$\Delta S = \sum_{i=1}^{\omega} \nu_i S_i - \sum_{k=1}^{\alpha} \nu_k S_k = \Delta S_0^{\text{Gas}} + \Delta \int_0^T \frac{dH}{T} - A R \ln K_p, \quad (18d)$$

die freie Energie der Reaktion

$$\Delta F = \sum_{i=1}^{\omega} \nu_i F_i - \sum_{k=1}^{\alpha} \nu_k F_k = \Delta U - T \Delta S. \quad (18e)$$

und die freie Enthalpie der Reaktion,

$$\Delta G \equiv \sum_{i=1}^{\omega} \nu_i G_i - \sum_{k=1}^{\alpha} \nu_k G_k = \Delta F + \Delta \nu A R T; \quad (18f)$$

worin $\sum_{k=1}^{\alpha}$ jedesmal Summierung über die ursprünglichen Reaktionsteilnehmer, $\sum_{i=1}^{\omega}$ über die nach erfolgter vollständiger Reaktion vorhandenen einzelnen Gase bedeuten; ν_i kennzeichnet die Molzahlen der einzelnen Gaskomponenten *nach* der Reaktion, ν_k die Molzahlen der *vor* dem Umsatz vorhandenen Gase. Diese Molzahlen stellen gleichzeitig die Höchstwerte $(N_i/N_L)_{\max}$ dar, die das betreffende Einzelgas im reagierenden System erreichen kann.

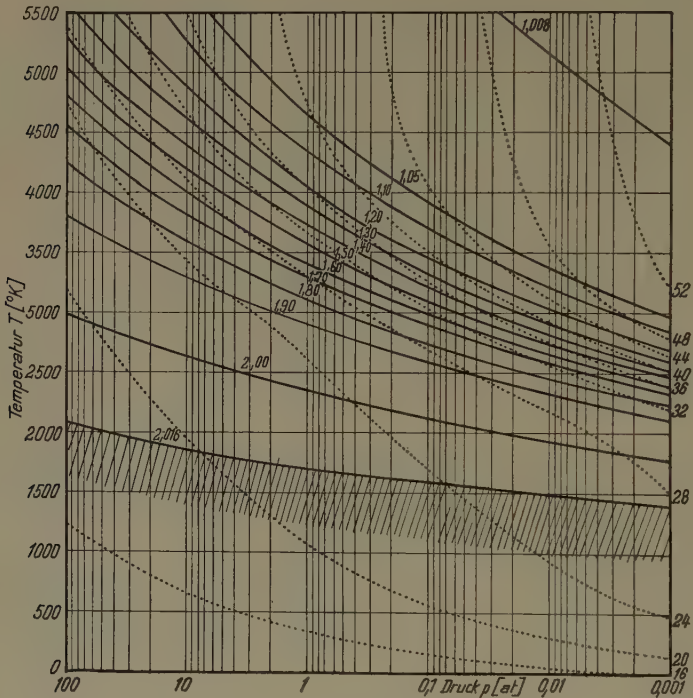
Vor einer näheren Untersuchung der Strömungsgleichungen unter den somit beschriebenen Verhältnissen ist noch zu bemerken, dass die Bedingungen konstanten Molvolumens $dV = 0$ und konstanter spezifischer Masse $d\rho = 0$ bei veränderlicher Gemischzusammensetzung nicht mehr gleichbedeutend sind, wie dies bei der Behandlung einheitlicher Gase oder eingefrorener Gemische der Fall war, weil nun *Teilchenzahl* pro Volumeneinheit und *Masse* pro Volumeneinheit nicht mehr einander konstant verhältig sind. Es gilt vielmehr wegen $V = f(n_\lambda)/g\rho$:

$$\frac{dV}{V} = -\frac{d\rho}{\rho} \left\{ 1 - \frac{\rho}{d\rho} \cdot \frac{df(n_\lambda)}{f(n_\lambda)} \right\} \quad (19)$$

für ein Gemisch, worin $f(n_\lambda)$ eine später genauer erörterte Funktion des Molbruchs n_λ bezeichnet. Bei isentropischen Strömungsbetrachtungen interessiert die volumenspezifische *Massenänderung*, also die partiellen Ableitungen nach $d\rho$ bzw. bei konstantem ρ . In gleicher Weise versteht man unter Reaktionsprozessen bei konstantem Volumen solche, bei denen sich das Volumen pro *Masseneinheit* nicht ändert.

Betrachten wir zunächst wieder die allgemeine Gaszustandsgleichung (1). Sie hat bei chemischer Veränderlichkeit der Gase eine weitere Variable, das

mittlere Molekulargewicht $M = \sum_{i=1}^z n_i M_i$, erhalten. Da dieser Ausdruck jedoch mit Hilfe des Massenwirkungsgesetzes und des van't-Hoff'schen Gesetzes als zusätzliche Bestimmungsgleichungen – dargestellt werden kann in Abhängigkeit von nur je zwei der übrigen, in der Zustandsgleichung vertretenen, verän-



Figur 1

Linien konstanter mittlerer Molekulargewichte M (voll ausgezogen) und Linien konstanter Entropien S (punktirt) in Abhängigkeit von Druck und Temperatur, für Wasserstoffgas.

derlichen Größen p , T und ρ , so bleibt die Zahl der *unabhängigen* Veränderlichen auf zwei beschränkt.

Figur 1 zeigt die Veränderlichkeit von M in Abhängigkeit von p und T für ein reagierendes Gasmisch vom Charakter $X_2 \rightleftharpoons 2X$ am Zahlenbeispiel des Wasserstoffs.

Die Veränderliche M kann wegen der Massenkonstanz

$$\Delta M = \sum_{i=1}^{\omega} \nu_i M_i - \sum_{k=1}^{\alpha} \nu_k M_k = 0$$

auch dargestellt werden in der Form $M = M_{00}/(N/N_L)$, wobei $M_{00} = \sum_{k=1}^{\alpha} v_k M_k$ das Gewicht der undissoziierten Ausgangsmasse, N/N_L die veränderliche Molzahl¹⁾ der Gesamtmasse bedeuten. Die Molzahl N/N_L lässt sich immer als Funktion F des Molbruchs $n_\lambda = N_\lambda/N$ eines geeignet ausgewählten Einzelgases λ des Gemisches darstellen, da bei einem System von z veränderlichen Komponenten die z Bestimmungsgleichungen für die z verschiedenen Komponenten, das heisst hier die z Molbrüche, immer auf *eine* Gleichung z -ten Grades für den Molbruch n_λ zurückgeführt werden können, dem alle übrigen Molbrüche eindeutig zugeordnet sind. Allgemein gilt also:

$$M = \frac{M_{00}}{F(n_\lambda)} = f(n_\lambda). \quad (20)$$

Wenn im gesamten Gassystem nur eine Reaktion möglich ist, lautet die Funktion F insbesondere:

$$\frac{N}{N_L} = F(n_\lambda) = \frac{\sum_{k=1}^{\alpha} v_k}{\left(1 - \frac{\Delta v}{v_\lambda} n_\lambda\right)}, \quad (20a)$$

und man erhält

$$f(n_\lambda) = \frac{M_{00} \left(1 - \frac{\Delta v}{v_\lambda} n_\lambda\right)}{\sum_{k=1}^{\alpha} v_k}, \quad (20b)$$

wobei n_λ alle Werte zwischen Null und $v_\lambda / \sum_{i=1}^{\omega} v_i$ annehmen kann. Es folgt weiterhin:

$$\frac{df(n_\lambda)}{dn_\lambda} = \frac{-f(n_\lambda)}{\frac{v_\lambda}{\Delta v} - n_\lambda}. \quad (20c)$$

Mittels dieser Beziehungen kann man nun die allgemeine Gaszustandsgleichung in der Form

$$p = \frac{gR}{f(n_\lambda)} \frac{q}{T} \quad (20d)$$

schreiben. Ihre partiellen Ableitungen lauten dann:

$$\left[\frac{\partial q}{\partial T}\right]_p = +\frac{q}{T} \left\{ T \frac{[\partial f(n_\lambda)/\partial T]_p}{f_{e,T}(n_\lambda)} - 1 \right\} = -\frac{q}{T} \left\{ \frac{T[\partial n_\lambda/\partial T]_p}{v_\lambda/\Delta v - n_\lambda} + 1 \right\}, \quad (21)$$

$$\left[\frac{\partial q}{\partial p}\right]_T = +\frac{q}{p} \left\{ p \frac{[\partial f(n_\lambda)/\partial p]_T}{f_{e,p}(n_\lambda)} + 1 \right\} = -\frac{q}{p} \left\{ \frac{p[\partial n_\lambda/\partial p]_T}{v_\lambda/\Delta v - n_\lambda} - 1 \right\}, \quad (22)$$

¹⁾ N bedeutet die Zahl aller jeweils vorhandenen Gasteilchen, N_λ die Zahl der jeweils vorhandenen Teilchen der Gasart λ , bei konstant bleibender Gesamtmasse.

$$\left[\frac{\partial p}{\partial T} \right]_e = -\frac{p}{T} \left\{ T \frac{[\partial f(n_\lambda)/\partial T]_e}{f_{p,T}(n_\lambda)} - 1 \right\} = +\frac{p}{T} \left\{ \frac{T[\partial n_\lambda/\partial T]_e}{v_\lambda/\Delta v - n_\lambda} + 1 \right\}, \quad (23)$$

$$\left[\frac{\partial p}{\partial e} \right]_T = -\frac{p}{e} \left\{ e \frac{[\partial f(n_\lambda)/\partial e]_T}{f_{p,e}(n_\lambda)} - 1 \right\} = +\frac{p}{e} \left\{ \frac{e[\partial n_\lambda/\partial e]_T}{v_\lambda/\Delta v - n_\lambda} + 1 \right\}, \quad (24)$$

$$\left[\frac{\partial T}{\partial e} \right]_p = +\frac{T}{e} \left\{ e \frac{[\partial f(n_\lambda)/\partial e]_p}{f_{T,e}(n_\lambda)} - 1 \right\} = -\frac{T}{e} \left\{ \frac{e[\partial n_\lambda/\partial e]_p}{v_\lambda/\Delta v - n_\lambda} + 1 \right\} \quad (25)$$

und

$$\left[\frac{\partial T}{\partial p} \right]_e = +\frac{T}{p} \left\{ p \frac{[\partial f(n_\lambda)/\partial p]_e}{f_{p,e}(n_\lambda)} - 1 \right\} = -\frac{T}{p} \left\{ \frac{p[\partial n_\lambda/\partial p]_e}{v_\lambda/\Delta v - n_\lambda} - 1 \right\}. \quad (26)$$

Sie gehen für

$$df(n_\lambda) = \left[\frac{df(n_\lambda)}{\partial T} \right]_p = \left[\frac{df(n_\lambda)}{\partial p} \right]_T = \left[\frac{df(n_\lambda)}{\partial T} \right]_e = \left[\frac{df(n_\lambda)}{\partial e} \right]_T = \left[\frac{df(n_\lambda)}{\partial e} \right]_p = \left[\frac{df(n_\lambda)}{\partial p} \right]_e = 0$$

in die klassischen Grenzfälle

$$\left[\frac{\partial e}{\partial T} \right]_p = -\frac{e}{T}, \quad (21a)$$

$$\left[\frac{\partial e}{\partial p} \right]_T = +\frac{e}{p}, \quad (22a)$$

$$\left[\frac{\partial p}{\partial T} \right]_e = +\frac{p}{T}, \quad (23a)$$

$$\left[\frac{\partial p}{\partial e} \right]_T = +\frac{p}{e}, \quad (24a)$$

$$\left[\frac{\partial T}{\partial e} \right]_p = -\frac{T}{e} \quad (25a)$$

und

$$\left[\frac{\partial T}{\partial p} \right]_e = +\frac{T}{p} \quad (26a)$$

über. Aus den Gleichungen (21) bis (26) folgt ferner:

$$\frac{dp}{p} = \frac{de}{e} + \frac{df(n_\lambda)}{f(n_\lambda)}. \quad (27)$$

Für Reaktionen mit unveränderter Molzahl $\Delta v = 0$ kann die Zustandsgleichung wie bei einem chemisch unveränderlichen Gasgemisch behandelt werden.

Ähnlich wie die Gaszustandsgleichung lässt sich auch die Entropiegleichung (4) als Funktion der vier Veränderlichen p , T , e und n_λ auffassen:

$$s = \sum_{i=1}^z \varphi_i(n_\lambda) S_i, \quad (28)$$

worin wieder

$$S_i = S_{0i}^p + \int_0^T C_p \frac{dT}{T} - AR \int_0^p \frac{dp}{p} \quad (28a)$$

$$= S_{0i}^e + \int_0^T C_v \frac{dT}{T} - AR \int_0^q \frac{dq}{q} \quad (28b)$$

mit molaren spezifischen Wärmen entsprechend den Gleichungen (11) und (12), und worin ferner

$$\varphi_i(n_\lambda) = \frac{n_i}{f(n_\lambda)} = \frac{n_i \sum_{k=1}^{\alpha} \nu_k}{M_{00} \left(1 - \frac{\Delta \nu}{\nu_\lambda} n_\lambda \right)}. \quad (28c)$$

Wenn λ eine der ω Gasarten darstellt, die sich nach erfolgter Reaktion bilden, so gilt für alle n_i zwischen $(z - \omega)$ und z :

$$n_i = \frac{\nu_i}{\nu_\lambda} n_\lambda,$$

während für die Molbrüche der restlichen α Gasarten, die wir zwecks Unterscheidung mit der Laufzahl k versehen haben,

$$n_k = \frac{\nu_k}{\sum_{k=1}^{\alpha} \nu_k} \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{\omega} \nu_i}{\nu_\lambda} n_\lambda \right)$$

geschrieben werden muss.

Nun lauten die Ableitungen der Entropiegleichung, in Funktionen von (p, T) , (q, T) oder (p, q) ausgedrückt:

$$ds_{p,T} = \left. \begin{aligned} & \sum_{i=1}^z \left\{ \left[\frac{\partial \varphi_i(n_\lambda)}{\partial T} \right]_p S_i + \varphi_i(n_\lambda) \left[\frac{\partial S_i}{\partial T} \right]_p \right\} dT \\ & + \sum_{i=1}^z \left\{ \left[\frac{\partial \varphi_i(n_\lambda)}{\partial p} \right]_T S_i + \varphi_i(n_\lambda) \left[\frac{\partial S_i}{\partial p} \right]_T \right\} dp; \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

$$ds_{q,T} = \left. \begin{aligned} & \sum_{i=1}^z \left\{ \left[\frac{\partial \varphi_i(n_\lambda)}{\partial T} \right]_q S_i + \varphi_i(n_\lambda) \left[\frac{\partial S_i}{\partial T} \right]_q \right\} dT \\ & + \sum_{i=1}^z \left\{ \left[\frac{\partial \varphi_i(n_\lambda)}{\partial q} \right]_T S_i + \varphi_i(n_\lambda) \left[\frac{\partial S_i}{\partial q} \right]_T \right\} dq; \end{aligned} \right\} \quad (30)$$

bzw.

$$\left. \begin{aligned} ds_{p,e} = & \sum_{i=1}^z \left\{ \left[\frac{\partial \varphi_i(n_\lambda)}{\partial \varrho} \right]_p S_i + \varphi_i(n_\lambda) \left[\frac{\partial S_i}{\partial \varrho} \right]_p \right\} d\varrho \\ & + \sum_{i=1}^z \left\{ \left[\frac{\partial \varphi_i(n_\lambda)}{\partial p} \right]_e S_i + \varphi_i(n_\lambda) \left[\frac{\partial S_i}{\partial p} \right]_e \right\} dp. \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Hierin sind die partiellen Ableitungen der molaren Entropien einzelner Gemischkomponenten, $[\partial S_i / \partial x]_y$, weiterhin gemäss den Ausführungen in Abschnitt II für reine Gase mit veränderlichen spezifischen Wärmen zu behandeln. Man erhält entsprechend:

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{\partial S_i}{\partial T} \right]_p &= AR \left\{ \left[\frac{\partial (\ln Z_i)}{\partial T} \right]_e + \left[\frac{\partial \{ T [\partial (\ln Z_i) / \partial T]_e \}}{\partial T} \right]_e + 1 \right\} \\ &= + \frac{C_{pi}}{T}; \end{aligned} \right\} \quad (29a)$$

$$\left[\frac{\partial S_i}{\partial p} \right]_T = AR \left[\frac{\partial (\ln Z_i)}{\partial p} \right]_T = - \frac{AR}{p}; \quad (29b)$$

$$\left. \begin{aligned} \left[\frac{\partial S_i}{\partial T} \right]_e &= AR \left\{ \left[\frac{\partial (\ln Z_i)}{\partial T} \right]_e + \left[\frac{\partial \{ T [\partial (\ln Z_i) / \partial T]_e \}}{\partial T} \right]_e \right\} \\ &= + \frac{C_{vi}}{T}; \end{aligned} \right\} \quad (30a)$$

$$\left[\frac{\partial S_i}{\partial \varrho} \right]_T = \left[\frac{\partial S_i}{\partial p} \right]_T \left[\frac{\partial p}{\partial \varrho} \right]_T = - \frac{AR}{\varrho}; \quad (30b)$$

$$\left[\frac{\partial S_i}{\partial \varrho} \right]_p = \left[\frac{\partial S_i}{\partial T} \right]_p \left[\frac{\partial T}{\partial \varrho} \right]_p = - \frac{C_{pi}}{\varrho} \quad (31a)$$

und

$$\left[\frac{\partial S_i}{\partial p} \right]_e = \left[\frac{\partial S_i}{\partial T} \right]_e \left[\frac{\partial T}{\partial p} \right]_e = + \frac{C_{vi}}{p}. \quad (31b)$$

Jeder der Ausdrücke $[\partial \varphi_i(n_\lambda) / \partial x]_y$ in den Gleichungen (29) bis (31) lässt sich auflösen in ein Produkt:

$$\frac{d\varphi_i(n_\lambda)}{dn_\lambda} \left[\frac{dn_\lambda}{dx} \right]_y,$$

wobei

$$\frac{d\varphi_i(n_\lambda)}{dn_\lambda} = \frac{\varphi_i(n_\lambda)}{\left(1 - \frac{\Delta v}{v_\lambda} n_\lambda\right) n_\lambda} = \frac{\frac{v_i}{v_\lambda} \sum_{k=1}^{\alpha} v_k}{M_{00} \left(1 - \frac{\Delta v}{v_\lambda} n_\lambda\right)^2} \quad (32a)$$

bzw.

$$\frac{d\varphi_k(n_\lambda)}{dn_\lambda} = - \frac{\frac{v_k}{v_\lambda} \sum_{k=1}^{\alpha} v_k}{M_{00} \left(1 - \frac{\Delta v}{v_\lambda}\right)^2} \quad (32b)$$

wird. Von den möglichen Varianten des zweiten Faktors $[\partial n_\lambda / \partial x]_y$ in obigem Produkt kann man die isothermen Änderungen des Molbruchs n_λ mit Hilfe des Massenwirkungsgesetzes (18a) – in der Schreibweise:

$$\xi_p(n_\lambda) = K_p p^{-\Delta v} \quad (33a)$$

oder

$$\xi_c(n_\lambda) = K_c \left(\frac{p}{M_{00}g}\right)^{-\Delta v}, \quad (33b)$$

worin

$$\begin{aligned} \xi_p(n_\lambda) &= \exp \left\{ \sum_{i=1}^{\omega} v_i \ln \left(\frac{v_i}{v_\lambda} n_\lambda \right) - \sum_{k=1}^{\alpha} v_k \ln \left[\frac{v_k}{\sum_{k=1}^{\alpha} v_k} \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^{\omega} v_i}{v_\lambda} \right) \right] \right\} \\ &= \xi_c(n_\lambda) [F(n_\lambda)]^{-\Delta v}, - \end{aligned}$$

erfassen. Dann wird:

$$\left[\frac{\partial n_\lambda}{\partial p} \right]_T = \frac{[\partial \xi_p(n_\lambda) / \partial p]_T}{[\partial \xi_p(n_\lambda) / \partial n_\lambda]_T} = - \frac{\xi_p(n_\lambda)}{d\xi_p(n_\lambda) / dn_\lambda} \cdot \frac{\Delta v}{p} \quad (34)$$

und

$$\left[\frac{\partial n_\lambda}{\partial p} \right]_T = \frac{[\partial \xi_c(n_\lambda) / \partial p]_T}{[\partial \xi_c(n_\lambda) / \partial n_\lambda]_T} = - \frac{\xi_c(n_\lambda)}{d\xi_c(n_\lambda) / dn_\lambda} \cdot \frac{\Delta v}{p}. \quad (35)$$

Die Molbruchänderung in Abhängigkeit von der Temperatur wird unter zusätzlicher Anwendung des van't-Hoff'schen Gesetzes:

$$\left[\frac{\partial K_p}{\partial T} \right]_p = K_p \frac{\Delta H}{A R T^2}$$

oder

$$\left[\frac{\partial K_c}{\partial T} \right]_p = K_c \frac{\Delta U}{A R T^2},$$

je nachdem Druck oder Dichte während der Änderung konstant bleiben sollen, – bestimmt zu:

$$\left[\frac{\partial n_\lambda}{\partial T} \right]_p = \left[\frac{\partial n_\lambda}{\partial K_p} \right]_p \left[\frac{\partial K_p}{\partial T} \right]_p = + \frac{\xi_p(n_\lambda)}{d\xi_p(n_\lambda) / dn_\lambda} \cdot \frac{\Delta H}{A R T^2} \quad (36)$$

und

$$\left[\frac{\partial n_\lambda}{\partial T} \right]_e = \left[\frac{\partial n_\lambda}{\partial K_c} \right]_e \left[\frac{\partial K_c}{\partial T} \right]_e = + \frac{\xi_c(n_\lambda)}{d\xi_c(n_\lambda)/dn_\lambda} \cdot \frac{\Delta U}{ART^2}. \quad (37)$$

In den Gleichungen (34) bis (37) beträgt dabei

$$\frac{d\xi_p(n_\lambda)}{dn_\lambda} = \xi_p(n_\lambda) \left\{ \sum_{i=1}^{\omega} \frac{v_i}{n_\lambda} + \frac{\sum_{k=1}^{\alpha} v_k}{v_\lambda / \sum_{i=1}^{\omega} v_i - n_\lambda} \right\}, \quad (38a)$$

bzw.

$$\frac{d\xi_c(n_\lambda)}{dn_\lambda} = \xi_c(n_\lambda) \left\{ \sum_{i=1}^{\omega} \frac{v_i}{n_\lambda} + \frac{\sum_{k=1}^{\alpha} v_k}{v_\lambda / \sum_{i=1}^{\omega} v_i - n_\lambda} + \frac{\Delta v}{v_\lambda / \Delta v - n_\lambda} \right\}. \quad (38b)$$

Die beiden restlichen partiellen Ableitungen von n_λ endlich lassen sich mit Hilfe der Gleichungen (25) und (26) auf die Beziehungen:

$$\left[\frac{\partial n_\lambda}{\partial \varrho} \right]_p = - \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{T \left[\frac{\partial n_\lambda}{\partial T} \right]_p}{1 + T \left[\frac{\partial n_\lambda}{\partial T} \right]_p / (v_\lambda / \Delta v - n_\lambda)} \quad (39)$$

bzw.

$$\left[\frac{\partial n_\lambda}{\partial p} \right]_e = + \frac{1}{p} \cdot \frac{T \left[\frac{\partial n_\lambda}{\partial T} \right]_e}{1 + T \left[\frac{\partial n_\lambda}{\partial T} \right]_e / (v_\lambda / \Delta v - n_\lambda)} \quad (40)$$

zurückführen, in denen $[\partial n_\lambda / \partial T]_p$ und $[\partial n_\lambda / \partial T]_e$ aus den Gleichungen (36) und (37) bekannt sind.

Man erhält so – unter Benützung der Gleichungen (38) bis (40) – für isentropische Entspannung eines chemisch veränderlichen, homogenen Systems idealer Gase mit nur einer möglichen Reaktion und mit veränderlichen spezifischen Wärmen die folgenden Differentialgleichungen.

1. Für die Beziehungen zwischen Druck und Temperatur gilt:

$$\left. \begin{aligned} ds_{p,T} = & \sum_{i=1}^s \left\{ \frac{d\varphi_i(n_\lambda)}{dn_\lambda} \left[\frac{\partial n_\lambda}{\partial T} \right]_p S_i + \varphi_i(n_\lambda) \left[\frac{\partial S_i}{\partial T} \right]_p \right\} dT \\ & + \sum_{i=1}^s \left\{ \frac{d\varphi_i(n_\lambda)}{dn_\lambda} \left[\frac{\partial n_\lambda}{\partial p} \right]_T S_i + \varphi_i(n_\lambda) \left[\frac{\partial S_i}{\partial p} \right]_T \right\} dp = \end{aligned} \right\} \quad (41)$$

$$\begin{aligned}
 ds_{p,T} = & \left\{ \frac{\left(v_\lambda - \sum_{i=1}^{\omega} v_i n_\lambda \right) v_\lambda n_\lambda \Delta v \sum_{k=1}^{\alpha} v_k}{M_{00} (v_\lambda - \Delta v n_\lambda)^3 \sum_{i=1}^{\omega} v_i} \cdot \frac{\Delta H \Delta S}{ART} + \frac{v_\lambda \sum_{k=1}^{\alpha} v_k \sum_{i=1}^z n_i C_{p_i}}{M_{00} (v_\lambda - \Delta v n_\lambda)} \right\} \frac{dT}{T} \\
 & - \left\{ \frac{\left(v_\lambda - \sum_{i=1}^{\omega} v_i n_\lambda \right) v_\lambda n_\lambda \Delta v \sum_{k=1}^{\alpha} v_k}{M_{00} (v_\lambda - \Delta v n_\lambda)^3 \sum_{i=1}^{\omega} v_i} \Delta v \Delta S + \frac{v_\lambda \sum_{k=1}^{\alpha} v_k AR}{M_{00} (v_\lambda - \Delta v n_\lambda)} \right\} \frac{dp}{p} \\
 = & \left\{ \frac{1) \left(v_\lambda - \sum_{i=1}^{\omega} v_i n_\lambda \right) v_\lambda n_\lambda \Delta v \sum_{k=1}^{\alpha} v_k}{M_{00} (v_\lambda - \Delta v n_\lambda)^3 \sum_{i=1}^{\omega} v_i} \cdot \frac{\Delta H (\Delta H - \Delta G)}{ART^2} \right. \\
 & \left. + \frac{v_\lambda \sum_{k=1}^{\alpha} v_k \sum_{i=1}^z n_i C_{p_i}}{M_{00} (v_\lambda - \Delta v n_\lambda)} \right\} \frac{dT}{T} \\
 & - \left\{ \frac{\left(v_\lambda - \sum_{i=1}^{\omega} v_i n_\lambda \right) v_\lambda n_\lambda \Delta v \sum_{k=1}^{\alpha} v_k}{M_{00} (v_\lambda - \Delta v n_\lambda)^3 \sum_{i=1}^{\omega} v_i} \cdot \frac{\Delta v (\Delta H - \Delta G)}{T} \right. \\
 & \left. + \frac{v_\lambda \sum_{k=1}^{\alpha} v_k AR}{M_{00} (v_\lambda - \Delta v n_\lambda)} \right\} \frac{dp}{p} = 0.
 \end{aligned} \quad (41)$$

Hierin beträgt die Enthalpie pro Kilogramm:

$$dh = c_p dT - \left\{ \frac{\left(v_\lambda - \sum_{i=1}^{\omega} v_i n_\lambda \right) v_\lambda n_\lambda \Delta v \sum_{k=1}^{\alpha} v_k}{M_{00} (v_\lambda - \Delta v n_\lambda)^3 \sum_{i=1}^{\omega} v_i} \cdot \frac{\Delta H}{p} \right\} dp \quad (41a)$$

mit

$$c_p = \frac{v_\lambda \sum_{k=1}^{\alpha} v_k \sum_{i=1}^z n_i C_{p_i}}{M_{00} (v_\lambda - \Delta v n_\lambda)} + \frac{\left(v_\lambda - \sum_{i=1}^{\omega} v_i n_\lambda \right) v_\lambda n_\lambda \Delta v \sum_{k=1}^{\alpha} v_k}{M_{00} (v_\lambda - \Delta v n_\lambda)^3 \sum_{i=1}^{\omega} v_i} \cdot \frac{\Delta^2 H}{ART^2} \quad (41b)$$

1) Wegen $H - G = TS$.

und ferner die reversible Arbeit pro Kilogramm:

$$\frac{d\mathcal{A}}{M} = - \left\{ \frac{v_\lambda \sum_{k=1}^{\alpha} v_k AR}{M_{00} (v_\lambda - \Delta v n_\lambda)} \cdot \frac{dp}{p} + \frac{\left(v_\lambda - \sum_{i=1}^{\omega} v_i n_\lambda \right) v_\lambda n_\lambda \Delta v \sum_{k=1}^{\alpha} v_k}{M_{00} (v_\lambda - \Delta v n_\lambda)^3 \sum_{i=1}^{\omega} v_i} \Delta G \left(\frac{\Delta H dT}{AR T^2} + \frac{dp}{p} \right) \right\} \quad (41c)$$

Da der Anteil der Reaktionsarbeit an der reversiblen Gesamtarbeit unter anderm auch temperaturabhängig ist, gilt bei chemisch veränderlichen Systemen nicht mehr:

$$\left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_p = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_p.$$

Nachdem man überall durch das mittlere Molekulargewicht

$$M = \frac{v_\lambda \sum_{k=1}^{\alpha} v_k}{M_{00} (v_k - \Delta v n_\lambda)}$$

gekürzt hat, lässt sich Gleichung (41) auch in der Form

$$\frac{dp}{p} = + \frac{\frac{\left(v_\lambda - n_\lambda \sum_{i=1}^{\omega} v_i \right) n_\lambda \Delta v}{(v_\lambda - n_\lambda \Delta v)^2 \sum_{i=1}^{\omega} v_i} \cdot \frac{\Delta H \Delta S}{AR T} + \sum_{i=1}^z n_i C_{p_i}}{\frac{\left(v_\lambda - n_\lambda \sum_{i=1}^{\omega} v_i \right) n_\lambda \Delta v}{(v_\lambda - n_\lambda \Delta v)^2 \sum_{i=1}^{\omega} v_i} \Delta v \Delta S + AR} \cdot \frac{dT}{T} \quad (41d)$$

schreiben, und ist so unmittelbar mit den Formeln (6a) in Kapitel I bzw. (13a) in Kapitel II vergleichbar.

2. Für die Beziehungen zwischen Dichte und Temperatur gilt:

$$\left. \begin{aligned} ds_{e,T} = & \sum_{i=1}^z \left\{ \frac{d\varphi_i(n_\lambda)}{dn_\lambda} \left[\frac{\partial n_\lambda}{\partial T} \right]_e S_i + \varphi_i(n_\lambda) \left[\frac{\partial S_i}{\partial T} \right]_e \right\} dT \\ & + \sum_{i=1}^z \left\{ \frac{d\varphi_i(n_\lambda)}{dn_\lambda} \left[\frac{\partial n_\lambda}{\partial \varrho} \right]_T S_i + \varphi_i(n_\lambda) \left[\frac{\partial S_i}{\partial \varrho} \right]_T \right\} d\varrho = \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

$$\begin{aligned}
 ds_{e,T} = & \left\{ \frac{\left(v_\lambda - n_\lambda \sum_{i=1}^{\omega} v_i \right) v_\lambda n_\lambda \Delta v \sum_{k=1}^{\alpha} v_k}{M_{00} (v_\lambda - n_\lambda \Delta v) \left[(v_\lambda - n_\lambda \Delta v)^2 \sum_{i=1}^{\omega} v_i + \left(v_\lambda - n_\lambda \sum_{i=1}^{\omega} v_i \right) n_\lambda \Delta^2 v \right]} \right. \\
 & \times \frac{\Delta U \Delta S}{ART} + \left. \frac{v_\lambda \sum_{k=1}^{\alpha} v_k \sum_{i=1}^z n_i C_{v_i}}{M_{00} (v_\lambda - n_\lambda \Delta v)} \right\} \frac{dT}{T} \\
 - & \left\{ \frac{\left(v_\lambda - n_\lambda \sum_{i=1}^{\omega} v_i \right) v_\lambda n_\lambda \Delta v \sum_{k=1}^{\alpha} v_k}{M_{00} (v_\lambda - n_\lambda \Delta v) \left[(v_\lambda - n_\lambda \Delta v)^2 \sum_{i=1}^{\omega} v_i + \left(v_\lambda - n_\lambda \sum_{i=1}^{\omega} v_i \right) n_\lambda \Delta^2 v \right]} \right. \\
 & \times \left. \Delta v \Delta S + \frac{v_\lambda \sum_{k=1}^{\alpha} v_k AR}{M_{00} (v_\lambda - n_\lambda \Delta v)} \right\} \frac{dQ}{Q} \\
 = & \left\{ \frac{\left(v_\lambda - n_\lambda \sum_{i=1}^{\omega} v_i \right) v_\lambda n_\lambda \Delta v \sum_{k=1}^{\alpha} v_k}{M_{00} (v_\lambda - n_\lambda \Delta v) \left[(v_\lambda - n_\lambda \Delta v)^2 \sum_{i=1}^{\omega} v_i + \left(v_\lambda - n_\lambda \sum_{i=1}^{\omega} v_i \right) n_\lambda \Delta^2 v \right]} \right. \\
 & \times \frac{\Delta U (\Delta U - \Delta F)}{ART^2} + \left. \frac{v_\lambda \sum_{k=1}^{\alpha} v_k \sum_{i=1}^z n_i C_{v_i}}{M_{00} (v_\lambda - n_\lambda \Delta v)} \right\} \frac{dT}{T} \\
 - & \left\{ \frac{\left(v_\lambda - n_\lambda \sum_{i=1}^{\omega} v_i \right) v_\lambda n_\lambda \Delta v \sum_{k=1}^{\alpha} v_k}{M_{00} (v_\lambda - n_\lambda \Delta v) \left[(v_\lambda - n_\lambda \Delta v)^2 \sum_{i=1}^{\omega} v_i + \left(v_\lambda - n_\lambda \sum_{i=1}^{\omega} v_i \right) n_\lambda \Delta^2 v \right]} \right. \\
 & \times \left. \frac{\Delta v (\Delta U - \Delta F)}{T} + \frac{v_\lambda \sum_{k=1}^{\alpha} v_k AR}{M_{00} (v_\lambda - n_\lambda \Delta v)} \right\} \frac{dQ}{Q} = 0.
 \end{aligned} \tag{42}$$

Bei der Ableitung dieses Ausdruckes wurde die Beziehung $U - F = TS$ benutzt. In Gleichung (42) beträgt:

$$du = c_v dT - \left\{ \frac{\left(v_\lambda - n_\lambda \sum_{i=1}^{\omega} v_i \right) v_\lambda n_\lambda \Delta v \sum_{k=1}^{\alpha} v_k}{M_{00} (v_\lambda - n_\lambda \Delta v) \left[(v_\lambda - n_\lambda \Delta v)^2 \sum_{i=1}^{\omega} v_i + \left(v_\lambda - n_\lambda \sum_{i=1}^{\omega} v_i \right) n_\lambda \Delta^2 v \right]} \times \frac{\Delta U}{\varrho} d\varrho \right\} \quad (42a)$$

mit

$$c_v = \frac{v_\lambda \sum_{k=1}^{\alpha} v_k \sum_{i=1}^z n_i C_{v_i}}{M_{00} (v_\lambda - n_\lambda \Delta v)} + \frac{\left(v_\lambda - n_\lambda \sum_{i=1}^{\omega} v_i \right) v_\lambda n_\lambda \Delta v \sum_{k=1}^{\alpha} v_k}{M_{00} (v_\lambda - n_\lambda \Delta v) \left[(v_\lambda - n_\lambda \Delta v)^2 \sum_{i=1}^{\omega} v_i + \left(v_\lambda - n_\lambda \sum_{i=1}^{\omega} v_i \right) n_\lambda \Delta^2 v \right]} \cdot \frac{\Delta^2 U}{A R T^2} \quad (42b)$$

Ferner ist:

$$\frac{dA}{M} = - \left\{ \frac{v_\lambda \sum_{k=1}^{\alpha} v_k A R}{M_{00} (v_\lambda - n_\lambda \Delta v)} \cdot \frac{d\varrho}{\varrho} + \frac{\left(v_\lambda - n_\lambda \sum_{i=1}^{\omega} v_i \right) v_\lambda n_\lambda \Delta v \sum_{k=1}^{\alpha} v_k}{M_{00} (v_\lambda - n_\lambda \Delta v) \left[(v_\lambda - n_\lambda \Delta v)^2 \sum_{i=1}^{\omega} v_i + \left(v_\lambda - n_\lambda \sum_{i=1}^{\omega} v_i \right) n_\lambda \Delta^2 v \right]} \times \Delta F \left(\frac{\Delta U dT}{A R T^2} \cdot \frac{d\varrho}{\varrho} \right) \right\} \quad (42c)$$

Im übrigen gilt in Analogie zu dem bereits unter 1 Erwähnten, dass bei chemisch veränderlichen Systemen wegen der Temperaturabhängigkeit der reversiblen Reaktionsarbeit:

$$\left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_v \neq T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_v$$

wird.

In der Form:

$$\frac{dQ}{Q} = \frac{\left(v_{\lambda} - n_{\lambda} \sum_{i=1}^{\omega} v_i \right) n_{\lambda} \Delta v}{(v_{\lambda} - n_{\lambda} \Delta v)^2 \sum_{i=1}^{\omega} v_i + \left(v_{\lambda} - n_{\lambda} \sum_{i=1}^{\omega} v_i \right) n_{\lambda} \Delta^2 v} \cdot \frac{\Delta U \Delta S}{ART} + \sum_{i=1}^z n_i C_{v_i} \cdot \frac{dT}{T} \quad (42d)$$

$$\frac{\left(v_{\lambda} - n_{\lambda} \sum_{i=1}^{\omega} v_i \right) n_{\lambda} \Delta v}{(v_{\lambda} - n_{\lambda} \Delta v)^2 \sum_{i=1}^{\omega} v_i + \left(v_{\lambda} - n_{\lambda} \sum_{i=1}^{\omega} v_i \right) n_{\lambda} \Delta^2 v} \Delta v \Delta S + AR$$

ist die Beziehung (42) wieder ohne weiteres mit den entsprechenden Ausdrücken (6b) in Kapitel I bzw. (14a) in Kapitel II vergleichbar.

3. Für die Beziehungen zwischen Druck und Dichte bei isentropischer Zustandsänderung ergibt sich aus den Gleichungen (41d) und (42d) durch Elimination von dT/T der Ausdruck:

$$\frac{dp}{p} = - \frac{\sum_{i=1}^z \left\{ \frac{d\varphi_i(n_{\lambda})}{dn_{\lambda}} \left[\frac{\partial n_{\lambda}}{\partial Q} \right]_p S_i + \varphi_i(n_{\lambda}) \left[\frac{\partial S_i}{\partial Q} \right]_p \right\} Q}{\sum_{i=1}^z \left\{ \frac{d\varphi_i(n_{\lambda})}{dn_{\lambda}} \left[\frac{\partial n_{\lambda}}{\partial p} \right]_e S_i + \varphi_i(n_{\lambda}) \left[\frac{\partial S_i}{\partial p} \right]_e \right\} p} \cdot \frac{\partial Q}{Q}$$

$$= \frac{\left(v_{\lambda} - n_{\lambda} \sum_{i=1}^{\omega} v_i \right) n_{\lambda} \Delta v}{(v_{\lambda} - n_{\lambda} \Delta v)^2 \sum_{i=1}^{\omega} v_i} \cdot \frac{\Delta H \Delta S}{ART} + \sum_{i=1}^z n_i C_{p_i}$$

$$= \frac{\left(v_{\lambda} - n_{\lambda} \sum_{i=1}^{\omega} v_i \right) n_{\lambda} \Delta v}{(v_{\lambda} - n_{\lambda} \Delta v)^2 \sum_{i=1}^{\omega} v_i + \left(v_{\lambda} - n_{\lambda} \sum_{i=1}^{\omega} v_i \right) n_{\lambda} \Delta^2 v} \cdot \frac{\Delta U \Delta S}{ART} + \sum_{i=1}^z n_i C_{v_i} \quad (43)$$

$$\times \frac{\left(v_{\lambda} - n_{\lambda} \sum_{i=1}^{\omega} v_i \right) n_{\lambda} \Delta^2 v \Delta S}{(v_{\lambda} - n_{\lambda} \Delta v)^2 \sum_{i=1}^{\omega} v_i + \left(v_{\lambda} - n_{\lambda} \sum_{i=1}^{\omega} v_i \right) n_{\lambda} \Delta^2 v} + AR \cdot \frac{dQ}{Q}$$

$$\times \frac{\left(v_{\lambda} - n_{\lambda} \sum_{i=1}^{\omega} v_i \right) n_{\lambda} \Delta^2 v \Delta S}{(v_{\lambda} - n_{\lambda} \Delta v)^2 \sum_{i=1}^{\omega} v_i} + AR$$

mit dessen Hilfe man gemäss der Beziehung $dp/dQ = a^2$ unmittelbar die Schallgeschwindigkeit im ruhenden, chemisch veränderlichen Gasgemisch bestimmen kann. Gleichung (43) entspricht den Ausdrücken (6c) in Kapitel I bzw. (15a) in Kapitel II.

Die Gleichungen (41d), (42d) und (43) sind nicht mehr ohne weiteres integrierbar. Wenn man bei endlich grossen Zustandsänderungen in chemisch veränderlichen Gasgemischen die klassischen Adiabatangleichungen (7a) bis (7c) formal weiter anwenden will, so hat dies mit Mittelwerten zu geschehen, die im Iterationsverfahren bestimmt werden können, wenn der Verlauf der örtlichen Werte im Koordinatensystem der Zustandsgrössen p , q und T zahlenmässig bekannt ist.

Ausserdem sieht man es den Gleichungen (41d), (42d) und (43) ohne weiteres an, dass Gase, die bei unveränderter Molzahl reagieren (das heisst $\Delta v = 0$), hinsichtlich aller Entropiebetrachtungen wie chemisch inerte Gasgemische im Sinne des Abschnitts II behandelt werden können, das heisst wie Gasgemische, für die $dn_\lambda \rightarrow 0$.

Definiert man die Grösse

$$\sigma_{p,T} = \frac{q}{p} \cdot \frac{dp}{dq}$$

als den differentiellen Isentropenexponenten – analog zur Grösse κ im Poisson'schen Gesetz – und hält man die Analogie zu den klassischen Adiabatangleichungen auch für die Beziehungen zwischen Druck und Temperatur sowie zwischen Dichte und Temperatur aufrecht, indem man

$$\frac{T dp}{p dT} \equiv \frac{\sigma_{p,T}}{\sigma_{p,T} - 1}$$

und

$$\frac{T dq}{q dT} \equiv \frac{1}{\sigma_{q,T} - 1}$$

setzt, so ergibt sich:

$$\sigma_{p,q} = \left. \begin{aligned} & \frac{\left(v_\lambda - n_\lambda \sum_{i=1}^{\omega} v_i \right) n_\lambda \Delta v}{(v_\lambda - n_\lambda \Delta v)^2 \sum_{i=1}^{\omega} v_i} \cdot \frac{\Delta H \Delta S}{A R T} + \sum_{i=1}^{\pi} n_i C_{v_i} \\ & \frac{\left(v_\lambda - n_\lambda \sum_{i=1}^{\omega} v_i \right) n_\lambda \Delta v}{(v_\lambda - n_\lambda \Delta v)^2 \sum_{i=1}^{\omega} v_i + \left(v_\lambda - n_\lambda \sum_{i=1}^{\omega} v_i \right) n_\lambda \Delta^2 v} \cdot \frac{\Delta U \Delta S}{A R T} + \sum_{i=1}^{\pi} n_i C_{v_i} \\ & \frac{\left(v_\lambda - n_\lambda \sum_{i=1}^{\omega} v_i \right) n_\lambda \Delta^2 v \Delta S}{(v_\lambda - n_\lambda \Delta v)^2 \sum_{i=1}^{\omega} v_i + \left(v_\lambda - n_\lambda \sum_{i=1}^{\omega} v_i \right) n_\lambda \Delta^2 v} + \frac{\Delta H}{A R} \\ & \times \frac{\left(v_\lambda - n_\lambda \sum_{i=1}^{\omega} v_i \right) n_\lambda \Delta^2 v \Delta S}{(v_\lambda - n_\lambda \Delta v)^2 \sum_{i=1}^{\omega} v_i} + A R \end{aligned} \right\} \quad (44)$$

$$\sigma_{p,T} = \frac{\left[\frac{\partial s}{\partial T}\right]_p T}{\left[\frac{\partial s}{\partial T}\right]_p T + \left[\frac{\partial s}{\partial p}\right]_T p} = \frac{\frac{\left(v_\lambda - n_\lambda \sum_{i=1}^{\omega} v_i\right) n_\lambda \Delta v}{\left(v_\lambda - n_\lambda \Delta v\right)^2 \sum_{i=1}^{\omega} v_i} \cdot \frac{\Delta H \Delta S}{A R T} + \sum_{i=1}^z n_i C_{p_i}}{\frac{\left(v_\lambda - n_\lambda \sum_{i=1}^{\omega} v_i\right) n_\lambda \Delta v}{\left(v_\lambda - n_\lambda \Delta v\right)^2 \sum_{i=1}^{\omega} v_i} \cdot \frac{\Delta U \Delta S}{A R T} + \sum_{i=1}^{\omega} n_i C_{v_i}}; \quad (45)$$

bzw.

$$\sigma_{p,T} = \frac{\left[\frac{\partial s}{\partial T}\right]_p T - \left[\frac{\partial s}{\partial p}\right]_T p}{\left[\frac{\partial s}{\partial p}\right]_T p} \left\{ \begin{aligned} & \frac{\left(v_\lambda - n_\lambda \sum_{i=1}^{\omega} v_i\right) n_\lambda \Delta v}{\left(v_\lambda - n_\lambda \Delta v\right)^2 \sum_{i=1}^{\omega} v_i + \left(v_\lambda - n_\lambda \sum_{i=1}^{\omega} v_i\right) n_\lambda \Delta^2 v} \cdot \frac{\Delta H \Delta S}{A R T} + \sum_{i=1}^z n_i C_{p_i} \\ & \frac{\left(v_\lambda - n_\lambda \sum_{i=1}^{\omega} v_i\right) n_\lambda \Delta v}{\left(v_\lambda - n_\lambda \Delta v\right)^2 \sum_{i=1}^{\omega} v_i + \left(v_\lambda - n_\lambda \sum_{i=1}^{\omega} v_i\right) n_\lambda \Delta^2 v} \cdot \frac{\Delta U \Delta S}{A R T} + \sum_{i=1}^{\omega} n_i C_{v_i} \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Es ist

$$\sigma_{p,p} = \sigma_{p,T} \frac{\sigma_{p,T} - 1}{\sigma_{p,T} - 1}.$$

Die Isentropenexponenten $\sigma_{p,T}$, $\sigma_{p,p}$ und $\sigma_{p,p}$ für die Beziehungen zwischen je zwei Zustandsgrößen sind also *nicht* untereinander gleich. Insbesondere sind sie auch verschieden von dem Verhältnis der örtlichen Gemischwärmen

$$\kappa_T = \frac{c_p}{c_v} = \frac{\left[\frac{\partial h}{\partial T}\right]_p}{\left[\frac{\partial u}{\partial T}\right]_p} \left\{ \begin{aligned} & \frac{\left(v_\lambda - n_\lambda \sum_{i=1}^{\omega} v_i\right) n_\lambda \Delta v}{\left(v_\lambda - n_\lambda \Delta v\right)^2 \sum_{i=1}^{\omega} v_i} \cdot \frac{\Delta^2 H}{A R T^2} + \sum_{i=1}^z n_i C_{p_i} \\ & \frac{\left(v_\lambda - n_\lambda \sum_{i=1}^{\omega} v_i\right) n_\lambda \Delta v}{\left(v_\lambda - n_\lambda \Delta v\right)^2 \sum_{i=1}^{\omega} v_i + \left(v_\lambda - n_\lambda \sum_{i=1}^{\omega} v_i\right) n_\lambda \Delta^2 v} \cdot \frac{\Delta^2 U}{A R T^2} + \sum_{i=1}^{\omega} n_i C_{v_i} \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Für $dn_\lambda \rightarrow 0$ streben jedoch alle demselben Grenzwert

$$\frac{\sum_{i=1}^z n_i C_{p_i}}{\sum_{i=1}^z n_i C_{v_i}}$$

zu.

Unter Verwendung der bisher gewonnenen Erkenntnisse erhält man für das spezielle Beispiel eines nach dem Schema $X_2 \rightleftharpoons 2 X$ reagierenden Gases, wie Wasserstoff, also mit

$$z = 2, \quad \alpha = \omega = 1, \quad \sum_{i=1}^{\omega} \nu_i = 2, \quad \sum_{k=1}^{\alpha} \nu_k = 1, \quad \Delta \nu = 1, \quad \nu_\lambda = \nu_H = 2,$$

sowie

$$n_\lambda = n_H, \quad M_{00} = M_{H_2}, \quad \Delta H = \Delta U + A R T = 2 H_H + W_0 - H_{H_2},$$

$$\Delta S = 2 S_H - S_{H_2}:$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{p,e} &= \frac{\frac{n_H(1-n_H)}{(2-n_H)^2} \cdot \frac{\Delta H \Delta S}{A R T} + n_H C_{pH} + (1-n_H) C_{pH_2}}{\frac{n_H(1-n_H)}{4-3n_H} \cdot \frac{\Delta U \Delta S}{A R T} + n_H C_{vH} + (1-n_H) C_{vH_2}} \\ &\quad \times \frac{\frac{n_H(1-n_H)}{4-3n_H} \Delta S + A R}{\frac{n_H(1-n_H)}{(2-n_H)^2} \Delta S + A R}; \end{aligned} \right\} \quad (44a)$$

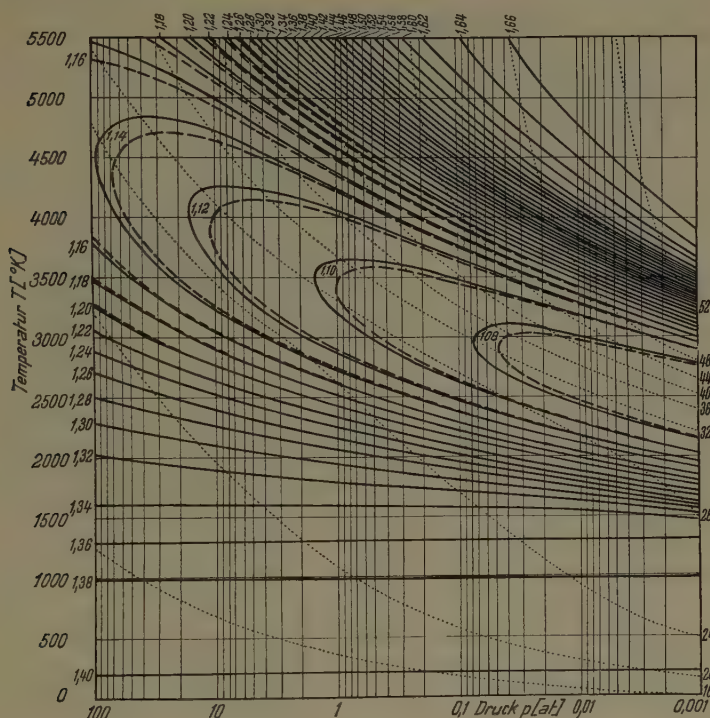
$$\sigma_{p,T} = \frac{\frac{n_H(1-n_H)}{(2-n_H)^2} \cdot \frac{\Delta H \Delta S}{A R T} + n_H C_{pH} + (1-n_H) C_{pH_2}}{\frac{n_H(1-n_H)}{(2-n_H)^2} \cdot \frac{\Delta U \Delta S}{A R T} + n_H C_{vH} + (1-n_H) C_{vH_2}}; \quad (45a)$$

$$\sigma_{e,T} = \frac{\frac{n_H(1-n_H)}{(4-3n_H)} \cdot \frac{\Delta H \Delta S}{A R T} + n_H C_{pH} + (1-n_H) C_{pH_2}}{\frac{n_H(1-n_H)}{(4-3n_H)} \cdot \frac{\Delta U \Delta S}{A R T} + n_H C_{vH} + (1-n_H) C_{vH_2}}; \quad (46a)$$

und

$$\kappa_T = \frac{\frac{n_H(1-n_H)}{(2-n_H)^2} \cdot \frac{\Delta^2 H}{A R T^2} + n_H C_{pH} + (1-n_H) C_{pH_2}}{\frac{n_H(1-n_H)}{(4-3n_H)} \cdot \frac{\Delta^2 U}{A R T^2} + n_H C_{vH} + (1-n_H) C_{vH_2}}. \quad (47a)$$

In den Figuren 2 bis 5 sind in Abhängigkeit von Druck und Temperatur die drei verschiedenen Isentropenexponenten $\sigma_{p,T}$, $\sigma_{e,T}$ und $\sigma_{p,e}$ sowie das



Figur 2

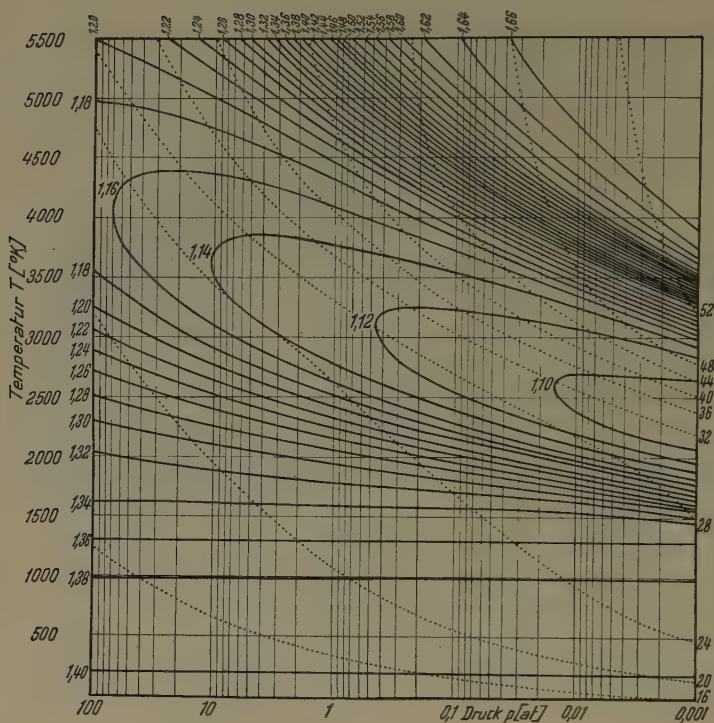
Linien konstanter örtlicher Isentropenexponenten $\sigma_{p,T}$ (voll ausgezogen), Linien konstanter örtlicher Isentropenexponenten $\sigma_{0,T}$ (soweit sie von $\sigma_{p,T}$ abweichen: gestrichelt) und Linien konstanter Entropien S (punktiert) in Abhängigkeit von Druck und Temperatur, für Wasserstoffgas.

Verhältnis der örtlichen spezifischen Gemischwärmen κ_T und das Verhältnis der mittleren spezifischen Gemischwärmen

$$\kappa_{0T} = \frac{\sum_{i=1}^z n_i H_i / T}{\sum_{i=1}^z n_i U_i / T}$$

für dissoziierendes Wasserstoffgas eingetragen, um die Unterschiede zahlenmäßig zu veranschaulichen. Punktiert wurden ausserdem in allen Abbildungen Linien konstanter Entropien gezeichnet, längs denen Zustandsänderungen entsprechend den Voraussetzungen dieses Abschnitts zu erfolgen hätten.

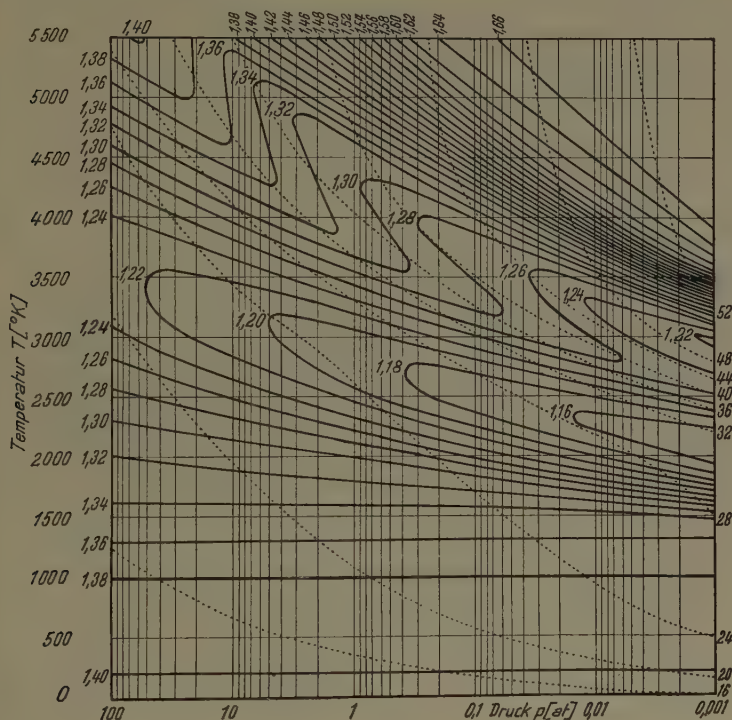
Die dargestellten örtlichen Isentropenexponenten zeigen zunächst die zum Teil erheblichen Abweichungen untereinander sowie vom Verhältnis der spe-



Figur 3

Linien konstanter örtlicher Isentropenexponenten $\sigma_{p,0}$ (voll ausgezogen) und Linien konstanter Entropien S (punktiert) in Abhängigkeit von Druck und Temperatur, für Wasserstoffgas.

zifischen Wärmen bei konstantem Druck und bei konstantem Volumen im Fall eines chemisch veränderlichen Gasmisches mit Gleichgewichtseinstellung. Wegen ihrer starken Veränderlichkeit über p und T sind sie von praktischem Wert vor allem bei der Berechnung von Zustandsänderungen innerhalb enger Bereiche von Druck und Temperatur unter Verwendung der üblichen Strömungsbeziehungen – besonders also zur Bestimmung der Schallgeschwindigkeit im ruhenden Gas bei trägheitsloser Gleichgewichtseinstellung beispielsweise. Auch bei zwar endlich grossen, aber noch geringen Zustandsänderungen kann man mit Hilfe derartiger Auftragungen, wie sie hier für Wasserstoffgas vorliegen, für irgendein chemisches Gleichgewichtssystem die klassischen, sehr übersichtlichen Strömungsbeziehungen weiter anwenden, wenn man für κ jeweils die richtige Beziehung einsetzt und aus dem betreffenden Diagramm dafür einen Mittelwert längs der betrachteten Zustandsänderung bildet, ähnlich wie dies bereits in Abschnitt II vorgeschlagen wurde. Bei Zustandsänderungen über weitere Druck- und Temperaturbereiche kann man mit geeignet gewählten



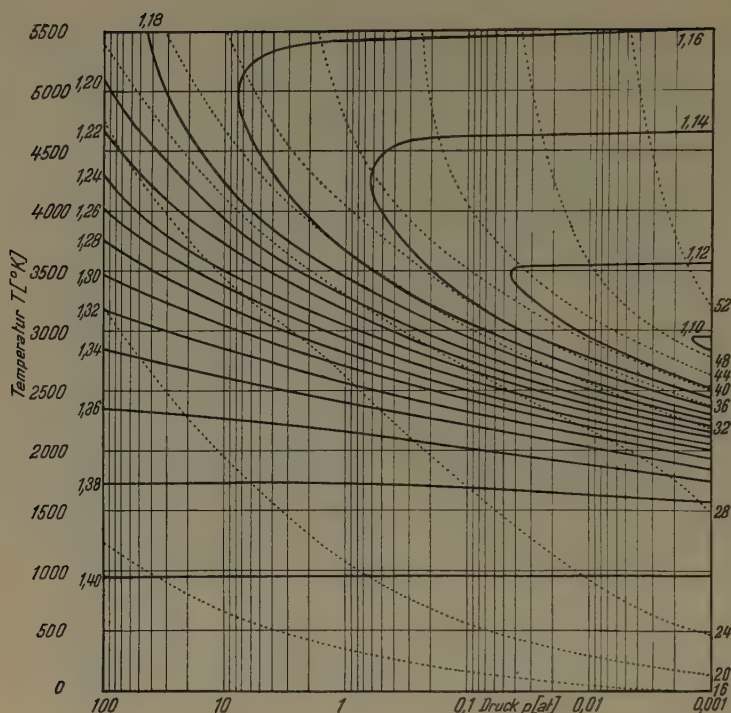
Figur 4

Linien konstanter örtlicher Adiabatenexponenten κ_T (voll ausgezogen) und Linien konstanter Entropien S (punktiert) in Abhängigkeit von Druck und Temperatur, für Wasserstoffgas.

Mittelwerten zwar noch zu *Näherungsergebnissen* gelangen; doch ist bei sehr weiten Änderungsbereichen meist die Anwendung von kombiniert graphisch-rechnerischen Verfahren unter Verwendung des Entropie-Enthalpie-Diagramms dem Versuch vorzuziehen, auf die hier dargestellte Art auch Tafeln für *mittlere* Isentropenexponenten zu entwerfen, die immer nur sehr spezielle Verwendungsfähigkeit haben könnten, da sie nicht nur stoffabhängig sind und von der Bezugstemperatur der dargestellten Temperaturspannen abhängen, sondern auch von den Bezugsdrücken der dargestellten Druckdifferenzen.

IV. Anwendungsbeispiele

Zum Schluss soll noch am Beispiel einiger besonders häufig benutzter Strömungsbeziehungen gezeigt werden, welche Werte an Stelle des klassischen κ treten müssten, wenn die Beziehungen auch in den Fällen chemisch veränder-



Figur 5

Linien konstanter mittlerer Adiabatenexponenten κ_{0T} (voll ausgezogen) und Linien konstanter Entropien S (punktiert) in Abhängigkeit von Druck und Temperatur, für Wasserstoffgas.

licher Gleichgewichtsströmung anwendbar bleiben sollen. In der klassischen Gleichung für die Schallgeschwindigkeit zum Beispiel müsste, wie bereits erwähnt wurde, κ durch den örtlichen Wert $\sigma_{p,q}$ ersetzt werden: $a^2 = \sigma_{p,q} p/q$.

Die Zeunersche Gleichung für die Ausströmgeschwindigkeit w_m aus einer Düse mit linearen Strömungsverhältnissen:

$$w_m = \sqrt{2 \frac{\kappa}{\kappa - 1} \cdot \frac{p_0}{q_0} \left[1 - \left(\frac{p_0}{p_m} \right)^{-(\kappa-1)/\kappa} \right]} \quad (48)$$

wäre demnach beispielsweise in der Form:

$$w_m = \sqrt{2 \frac{\kappa_0 T_0}{\kappa_0 T_0 - 1} \cdot \frac{p_0}{q_0} \left[1 - \frac{\kappa_0 T_m}{\kappa_0 T_0} \cdot \frac{\kappa_0 T_0 - 1}{\kappa_0 T_m - 1} \left(\frac{p_0}{p_m} \right)^{-(\sigma_{p_0 m, q_0 m} - 1)/\sigma_{p_0 m, q_0 m}} \right]} \quad (48a)$$

zu schreiben, worin der Index 0 die Zustände im Ofen, der Index m die in der Düsenmündung bezeichnen.

Die Bestimmungsgleichung für die Geschwindigkeit w_v im Düsenhals einer Lavaldüse:

$$w_v = \sqrt{\kappa \frac{p_v}{\rho_v}} = \sqrt{\kappa \frac{p_0}{\rho_0} \left(\frac{p_0}{p_v}\right)^{-(\kappa-1)/\kappa}} \quad (49)$$

würde

$$\left. \begin{aligned} w_v &= \sqrt{(\sigma_{p_v, \rho_v} - 1) \frac{\kappa_0 T_v}{\kappa_0 T_v - 1} \cdot \frac{p_v}{\rho_v}} \\ &= \sqrt{(\sigma_{p_v, \rho_v} - 1) \frac{\kappa_0 T_v}{\kappa_0 T_v - 1} \cdot \frac{p_0}{\rho_0} \left(\frac{p_0}{p_v}\right)^{-(\sigma_{p_0 v, \rho_0 v} - 1)/\sigma_{p_0 v, \rho_0 v}}} \end{aligned} \right\} \quad (49a)$$

bei Berücksichtigung der verschiedenen κ -Werte lauten müssen. Hier bezeichnet der Index v überall die Zustände im engsten Düsenquerschnitt.

Die durch Gleichsetzen der Geschwindigkeiten in (48) und (49) sich ergebende klassische Beziehung für das Verhältnis der Drucke im Ofen und im engsten Querschnitt:

$$\frac{p_0}{p_v} = \left(\frac{\kappa + 1}{2}\right)^{\kappa/(\kappa-1)} \quad (50)$$

müsste bei Ableitung aus den Gleichungen (48a) und (49a) genauer

$$\frac{p_0}{p_v} = \left(\frac{\sigma_{p_v, \rho_v} + 1}{2} \cdot \frac{\kappa_0 T_v}{\kappa_0 T_0} \cdot \frac{\kappa_0 T_0 - 1}{\kappa_0 T_v - 1}\right)^{\sigma_{p_0 v, \rho_0 v}/(\sigma_{p_0 v, \rho_0 v} - 1)} \quad (50a)$$

heissen.

Die klassische Gleichung endlich für das Verhältnis von engstem Querschnitt f_v zu Düsenmündungsquerschnitt f_m :

$$\frac{f_v}{f_m} = \left(\frac{p_m}{p_0}\right)^{1/\kappa} \left(\frac{\kappa + 1}{2}\right)^{1/\kappa - 1} \sqrt{\frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} \left[1 - \left(\frac{p_m}{p_0}\right)^{(\kappa-1)/\kappa}\right]} \quad (51)$$

müsste genauer

$$\begin{aligned} \frac{f_v}{f_m} &= \left(\frac{p_m}{p_0}\right)^{1/\sigma_{p_0 m, \rho_0 m}} \left(\frac{\sigma_{p_v, \rho_v} + 1}{2} \cdot \frac{\kappa_0 T_v}{\kappa_0 T_0} \cdot \frac{\kappa_0 T_0 - 1}{\kappa_0 T_v - 1}\right)^{(\sigma_{p_0 v, \rho_0 v}/\sigma_{p_0 m, \rho_0 m})/(\sigma_{p_0 v, \rho_0 v} - 1)} \\ &\times \sqrt{\frac{\sigma_{p_v, \rho_v} + 1}{\sigma_{p_v, \rho_v} - 1} \left[1 - \frac{\kappa_0 T_m}{\kappa_0 T_0} \cdot \frac{\kappa_0 T_0 - 1}{\kappa_0 T_m - 1} \left(\frac{p_m}{p_0}\right)^{(\sigma_{p_0 m, \rho_0 m} - 1)/\sigma_{p_0 m, \rho_0 m}}\right]} \end{aligned} \quad (51a)$$

geschrieben werden.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] G. KLOBE, *Der Adiabatenkoeffizient dissoziierender Feuergase bei adiabatisch isentropischer Entspannung*, Z. angew. Math. 2, Fasz. 5, 394–402 (1951).
- [2] E. EUCKEN und K. SCHÄFER, *Lehrbuch der chemischen Physik*, Band 2, 1 (Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig 1943).
- [3] E. JUSTI, *Spezifische Wärme, Enthalpie, Entropie und Dissoziation technischer Gase* (Springer, Berlin 1938).

- [4] E. SÄNGER und I. BREDT, *Über einen Raketenantrieb für Fernbomber*, Dtsche. Luftfahrtforsch. UM 3538, Ainring 1944 (Edition Robert Cornog, St. Barbara, California, 1953).
- [5] I. BREDT, *Wasserstoff bei hohen Temperaturen*, Z. Naturforsch. 6a, 105–112 (1951).
- [6] I. SÄNGER-BREDT, *Zur Bestimmung des Verbrennungswirkungsgrades in stationären Feuerungen*, Z. phys. Chem. 202, H. 1/2, 73–92 (1953).
- [7] E. SCHMIDT, *Einführung in die technische Thermodynamik* (Springer, Berlin, Göttingen und Heidelberg 1950).

Summary

The notion of an adiabatic exponent—as the ratio κ of the specific heats at constant pressure and at constant volume—which had been so productive in classical gasdynamics, gets unfit for thermodynamic flow, if the suppositions of constant specific heats and of constant partial pressures can no longer be maintained for the different gas components.

In these cases, the heterogeneous origin of the different, only *apparently* uniform exponents, which occur in the flow equations, becomes evident and their numeric values begin to differ from each other. For dissociating gases, e.g., the adiabatic exponent is no longer identical with the ratio of specific heats.

In the present paper, the influences of variable specific heats and partial pressures on the adiabatic exponent are taken separately into account. With new, appropriately determined exponents σ , generalized equations for isentropic flow are established, from which the classical formula can be derived as a limit case.

(Eingegangen: 8. Februar 1954.)

Kurze Mitteilungen – Brief Reports – Communications brèves

Zum Stromrauschen von Halbleitern

VON WILLY BAUMGARTNER und HANS ULRICH THOMA, Zürich¹⁾

Verschiedene wichtige Ergebnisse der Rauschmessungen an Halbleitern haben bis jetzt noch keine Erklärung gefunden, die auf Ad-hoc-Mechanismen verzichten kann. So ist die Grösse des Rauschquadrates nicht verständlich, ebenfalls nicht seine Frequenzabhängigkeit (zum Beispiel f^{-1} -Spektrum, das bis zu tiefen Frequenzen läuft)²⁾. Nimmt man an, dass speziell für letztere das Spektrum unkorreliert aufeinanderfolgender Einzelereignisse massgebend ist, so muss schon das Einzelereignis selbst eine grosse Ablaufdauer aufweisen. Die sonst plausible Gisolfsche Theorie³⁾ scheitert in dieser Hinsicht an der zu kurzen Dauer der freien Beweglichkeit der Elektronen und Löcher.

¹⁾ Abteilung für industrielle Forschung des Instituts für technische Physik der ETH.

²⁾ A. VAN DER ZIEL, *Physica* 16, 359 (1950). K. W. BOER, *Ann. Phys.*, 6. Folge, 14, 87 (1954). D. K. C. McDONALD, *Rep. Prog. Phys.* 12, 56 (1949).

³⁾ J. H. GISOLF, *Physica* 16, 825 (1949).

Es liegt nun nahe, den in der Theorie der Photohalbleiter und Phosphore wohl-bekannten Vorgang des Einfangens in Haftstellen zu berücksichtigen. Das Einzelereignis hätte dann folgenden Verlauf:

1. Bildung eines Elektron-Loch-Paares (thermisch oder optisch).
2. Wandern des freien Elektrons (das Loch habe vorerst die Beweglichkeit 0) während einer gewissen Zeitdauer.
3. Das Elektron wird eingefangen. In diesem Zustand soll keine Rekombination mit Löchern stattfinden.
4. Reemission aus dem eingefangenen Zustand und Weiterwandern des Elektrons.
5. Vorgang 3 und 4 mehrfach wiederholt.
6. Rekombination des freien Elektrons mit einem Loch.

Da die Verweilzeit im eingefangenen Zustand bekanntlich grosse Werte erreichen kann (≥ 1 s) so besitzt das oben beschriebene Einzelereignis die geforderte langfristige Dauer.

Die Rechnung ergibt für den besonders interessierenden niederfrequenten Anteil des Stromrauschens:

$$W = \frac{4 N_e \mu_e^2 e^2}{L^2} \cdot \frac{q^2}{\beta + q} \cdot \frac{1}{1 + \omega^2 \alpha^2 (1 + q/\beta)^2} E^2.$$

Dabei ist

W = Powerspektrum, das heisst $\int_0^\infty W df = \bar{I}^2$;

N_e = Anzahl freier Elektronen im Parallelepiped mit Länge L cm;

ω = Kreisfrequenz;

e = Elementarladung;

E = Feldstärke;

μ_e = Beweglichkeit des Elektrons;

α = mittlere Lebensdauer des Elektrons in den Haftstellen $\alpha \gg \beta, q$;

β = mittlere Lebensdauer des Elektrons im Leitungsband, falls keine Rekombination auftritt;

q = mittlere Lebensdauer des Elektrons im Leitungsband, falls kein Einfangen auftritt.

Für die entsprechende Rauschziffer R ergibt sich

$$R = \frac{e \mu_e q}{k T} \cdot \frac{q}{\beta + q} \cdot \frac{1}{1 + \omega^2 \alpha^2 (1 + q/\beta)^2} E^2;$$

mit

$$\alpha = 10^{-1} \text{ s}, \quad q = 10^{-5} \text{ s}, \quad \beta = 10^{-4} \text{ s},$$

$$\frac{e}{k T} = 40 \text{ V}^{-1}, \quad \mu_e = 10^2 \text{ cm}^2/\text{V s}, \quad E = 10^2 \text{ V/cm}$$

folgt

$$R_{\omega=0} \sim 40.$$

Wir erhalten also wohl die bis zu tiefen Frequenzen gehende Änderung des Rauschens, aber nur mässig grosse Werte der Rauschziffer. Haben aber die Löcher eine Beweglichkeit $\mu_h \neq 0$, ist also während der Haftdauer eines Elektrons laufend ein Stromtransport durch entsprechende (Ladungsneutralität!) Löcher möglich, so folgt als Rauschziffer:

$$R = \frac{e \mu_h \alpha}{k T} \cdot \frac{\beta + q}{\beta} \cdot \frac{1}{1 + \omega^2 \alpha^2 (1 + q/\beta)^2} E^2,$$

was mit den oben angeführten Daten ergibt ($\mu_h = 10^2 \text{ cm}^2/\text{Vs}$)

$$R_{\omega=0} \sim 4 \cdot 10^6,$$

also sehr grosse Werte.

Selbstverständlich kann eine Ladungsneutralisierung auch durch ein in der Nähe des Elektrons ebenfalls feststehendes Loch erfolgen, so dass dieser Wert nur als obere Schranke zu lesen ist.

Auf die einleuchtenden Beziehungen mit Ankling- und Abklingzeiten des Photostromes in Photohalbleitern¹⁾ und der Phosphoreszenz von Luminophoren sei hingewiesen. So besteht die Möglichkeit, durch Annahme einer kontinuierlichen Haftstellenverteilung, wie sie GARLICK²⁾ zur Deutung des Abklings von ZnS-Cu-Phosphoren verwendet, eine Frequenzabhängigkeit proportional f^{-k} ($1 \leq k \leq 2$) zu erklären.

Summary

The wellknown trapping of electrons and holes seems to give an explanation of the current noise in semiconductors. It is pointed out how especially the magnitude and low frequency dependence of the noise power can be understood; the possibility of a strong correlation between low frequency noise and photoconductive properties of semiconductors is emphasized.

(Eingegangen: 10. Oktober 1954.)

Vibration of Isosceles Triangular Plates

By HUGH L. COX³⁾ and BERTRAM KLEIN³⁾, Los Angeles, California

1. Introduction

Frequently in the analysis of structures it is necessary to determine the lowest natural frequency of flexural vibration of a triangular plate. The approximate solution presented in this paper is based essentially upon the method of collocation, i.e. for an assumed deflection function, which satisfies the boundary conditions, the governing differential equation for the plate is satisfied at a finite number of points. Comparisons are made for certain cases with other known solutions, and the agreement appears to be satisfactory.

2. Simply Supported Plates

Let x and y be coordinates in the middle surface of the plate as shown in the lower part of Figure 1. The static differential equation for a uniform plate subjected to a uniformly distributed lateral load is

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = q,$$

¹⁾ Über einen experimentellen Befund in diesem Sinne vgl. R. L. PETRITZ, Proc. IRE 40, 1440 (1952), speziell S. 1451.

²⁾ G. F. J. GARLICK, *Luminescent Materials* (Clarendon Press, Oxford 1949), S. 33.

³⁾ Research Engineer, T. Y. Lin and Associates.

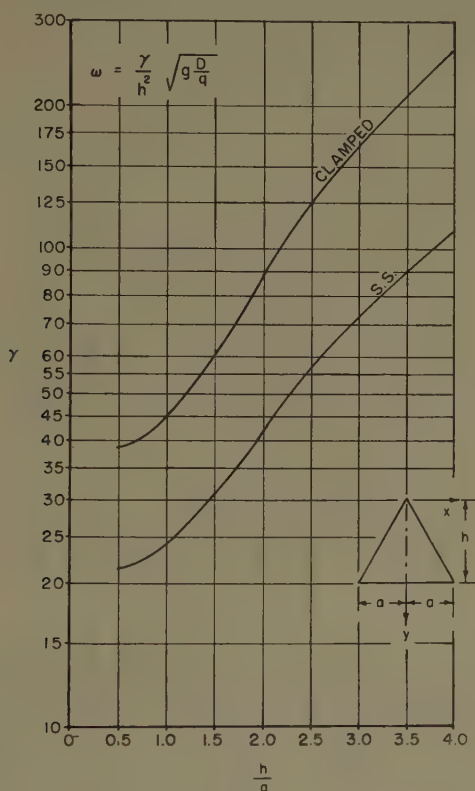


Figure 1

Vibration Coefficients for Triangular Plates.

where

D = plate stiffness;

w = deflection of plate, positive downward;

q = lateral load per unit length squared.

If the term q in the above equation is replaced by an equivalent inertia load when the plate is vibrating, there results

$$D \nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q}{g} \omega^2 w, \quad (1)$$

where

ω = natural frequency;

g = gravitational acceleration.

The boundary conditions are

$$(w)_{y=h} = (w)_{x=\pm(a/h)y} = 0, \quad (2)$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right)_{y=h} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right)_{x=\pm(a/h)y} = 0, \quad (3)$$

where n is the normal direction to the lines

$$x = \pm \frac{a}{h} y,$$

and t is the tangential direction of any line. Along a rectilinear edge the term $\partial^2 w / \partial t^2$ is equal to zero.

The deflection function

$$w = (\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \alpha_3 F_3) \cos k \frac{\pi}{2} \cdot \frac{h}{a} \cdot \frac{x}{y}, \quad (4)$$

where

$$F_1 = 2 \sin^2 \frac{\pi y}{2h} \sin \frac{\pi y}{h}; \quad F_2 = 2 \sin^2 \frac{\pi y}{2h} \sin \frac{2\pi y}{h}; \quad F_3 = 2 \sin^2 \frac{\pi y}{2h} \sin \frac{3\pi y}{h};$$

α = generalized coefficient; k = odd integer

satisfies equation (2) exactly and the condition

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} \right)_{x=\pm(a/h)y} = 0$$

from equation (3) at some point in the region $h/2 \leq y \leq 3h/4$; the condition that

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{y=h} = 0$$

is satisfied exactly only when $x = 0$. Selected points for collocation will be on the line $x = 0$; therefore, no serious error should result from not satisfying completely the boundary conditions. The first term of the deflection function given by equation (4) appears physically to have the shape that one might expect for a triangular plate vibrating in its fundamental mode.

It will be necessary to differentiate the deflection function given in equation (4) and substitute the proper derivatives into equation (1).

Let

$$F(y) = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2 + \alpha_3 F_3. \quad (5)$$

Equation (4) may be written as

$$w = F(y) \cos k \frac{\pi}{2} \cdot \frac{h}{a} \cdot \frac{x}{y}. \quad (6)$$

Derivatives of w at $x = 0$ are:

$$(w)_{x=0} = F(y),$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{x=0} = -F(y) \left[k \frac{\pi}{2} \cdot \frac{h}{a} \cdot \frac{1}{y} \right]^2, \quad (7)$$

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right)_{x=0} = F(y) \left[k \frac{\pi}{2} \cdot \frac{h}{a} \cdot \frac{1}{y} \right]^4, \quad (8)$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=0} = \frac{\partial^2 F(y)}{\partial y^2}, \quad (9)$$

$$\left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right)_{x=0} = \frac{\partial^4 F(y)}{\partial y^4}, \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right)_{x=0} &= -\frac{k^2 \pi^2}{4 y^2} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{\partial^2 F(y)}{\partial y^2} + \frac{k^2 \pi^2}{y^3} \left(\frac{h}{a} \right)^2 \frac{\partial F(y)}{\partial y} \\ &\quad - \frac{3}{2} \cdot \frac{k^2 \pi^2}{y^4} \left(\frac{h}{a} \right)^2 F(y). \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

The derivatives of $F(y)$ are written as

$$\left. \begin{aligned} F_1' &= \frac{\pi}{h} \left[\cos \frac{\pi y}{h} - \cos \frac{2 \pi y}{h} \right], \\ F_1'' &= \left(\frac{\pi}{h} \right)^2 \left[-\sin \frac{\pi y}{h} + 2 \sin \frac{2 \pi y}{h} \right], \\ F_1''' &= \left(\frac{\pi}{h} \right)^3 \left[\sin \frac{\pi y}{h} - 2 \sin \frac{2 \pi y}{h} \right], \\ F_2' &= \frac{\pi}{h} \left[2 \cos \frac{2 \pi y}{h} - \frac{3}{2} \cos \frac{3 \pi y}{h} - \frac{1}{2} \cos \frac{\pi y}{h} \right], \\ F_2'' &= \left(\frac{\pi}{h} \right)^2 \left[-4 \sin \frac{2 \pi y}{h} + \frac{9}{2} \sin \frac{3 \pi y}{h} + \frac{1}{2} \sin \frac{\pi y}{h} \right], \\ F_2''' &= \left(\frac{\pi}{h} \right)^3 \left[16 \sin \frac{2 \pi y}{h} - \frac{81}{2} \sin \frac{3 \pi y}{h} - \frac{1}{2} \sin \frac{\pi y}{h} \right], \\ F_3' &= \frac{\pi}{h} \left[3 \cos \frac{3 \pi y}{h} - 2 \cos \frac{4 \pi y}{h} - \cos \frac{2 \pi y}{h} \right], \\ F_3'' &= \left(\frac{\pi}{h} \right)^2 \left[-9 \sin \frac{3 \pi y}{h} + 8 \sin \frac{4 \pi y}{h} + 2 \sin \frac{2 \pi y}{h} \right], \\ F_3''' &= \left(\frac{\pi}{h} \right)^3 \left[81 \sin \frac{3 \pi y}{h} - 128 \sin \frac{4 \pi y}{h} - 8 \sin \frac{2 \pi y}{h} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

If equations (12) are substituted into equations (7) through (11) and the resulting derivatives are substituted into equation (1), there results

$$\left. \begin{aligned} A \alpha_1 + B \alpha_2 + C \alpha_3 &= 0, \quad \text{at } y = \frac{h}{2}, \\ J \alpha_1 + E \alpha_2 + F \alpha_3 &= 0, \quad \text{at } y = \frac{2h}{3}, \\ G \alpha_1 + H \alpha_2 + I \alpha_3 &= 0, \quad \text{at } y = \frac{3h}{4}, \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

where

$$\left. \begin{aligned} A &= \pi^2 \left(k \frac{h}{a} \right)^4 + \pi^2 + 22.00490 \left(k \frac{h}{a} \right)^2 - 0.10132 \beta, \\ B &= 394.7860 - 21.5740 \left(k \frac{h}{a} \right)^2, \\ C &= -\pi^2 \left(k \frac{h}{a} \right)^4 - 799.4416 - 179.9193 \left(k \frac{h}{a} \right)^2 + 0.10132 \beta, \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

$$\left. \begin{aligned}
 J &= 2.34221 \left(k \frac{h}{a} \right)^4 + 44.41342 + 5.26442 \left(k \frac{h}{a} \right)^2 - 0.07599 \beta, \\
 E &= -2.34211 \left(k \frac{h}{a} \right)^4 - 81.42461 - 41.13184 \left(k \frac{h}{a} \right)^2 + 0.07599 \beta, \\
 F &= -592.1790 + 21.78418 \left(k \frac{h}{a} \right)^2, \\
 G &= 2.35332 \left(k \frac{h}{a} \right)^4 + 85.93610 + 1.77300 \left(k \frac{h}{a} \right)^2 - 0.12230 \beta, \\
 H &= -3.32809 \left(k \frac{h}{a} \right)^4 - 444.04924 - 60.45476 \left(k \frac{h}{a} \right)^2 + 0.17296 \beta, \\
 I &= 2.35332 \left(k \frac{h}{a} \right)^4 + 644.24798 + 123.31292 \left(k \frac{h}{a} \right)^2 - 0.12230 \beta
 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

and where

$$\beta = \frac{q \omega^2 h^4}{g D}. \quad (15)$$

Values of β for various ratios of h/a may be determined from the condition

$$\begin{vmatrix} A & B & C \\ J & E & F \\ G & H & I \end{vmatrix} = 0. \quad (16)$$

Figure 1 shows in graphical form, on semilog paper, the relationship between γ and h/a for a practical range of h/a values, $\gamma = \beta^{1/2}$. For the particular case of a right isosceles triangle, from equation 16, $\gamma = 24.028$. The second mode of vibration of a square plate corresponds to the fundamental mode of a right isosceles triangle. The exact answer for the second mode of a square plate is $\gamma = 24.674^1$. Thus it is seen that the above solution is in error by 2.61 percent in the case of a right isosceles plate.

3. Clamped Plates

Consider the plate shown in the lower part of Figure 1. The boundary conditions are

$$(w)_{y=h} = (w)_{x=\pm(a/h)y} = 0, \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=h} = \left(\frac{\partial w}{\partial n} \right)_{x=\pm(a/h)y} = 0. \quad (17)$$

The deflection function

$$w = (\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2) F_3, \quad (18)$$

where

$$F_1 = y^2 \sin^2 \frac{\pi y}{h}, \quad F_2 = y^2 \sin \frac{\pi y}{h} \sin \frac{2\pi y}{h},$$

$$F_3 = \left[1 - \left(\frac{h}{a} \cdot \frac{x}{y} \right)^2 \right] \cos k \frac{\pi}{2} \cdot \frac{h}{a} \cdot \frac{x}{y}$$

¹ S. TIMOSHENKO, *Vibration Problems in Engineering*, 2nd edition (D. Van Nostrand Co., New York, 1937), p. 423.

satisfies the boundary conditions. It is necessary to differentiate equation (18) and substitute the proper derivatives into equation (1). Let

$$F(y) = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2. \quad (19)$$

Derivatives of w at $x = 0$ become

$$\begin{aligned} (w)_{x=0} &= F(y), \\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{x=0} &= -F(y) \left(\frac{h}{a}\right)^2 \frac{1}{y^2} \left[2 + \frac{k^2 \pi^2}{4}\right], \\ \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}\right)_{x=0} &= F(y) \left(\frac{h}{a}\right)^4 \frac{k^2 \pi^2}{y^4} \left[3 + \frac{k^2 \pi^2}{16}\right], \\ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{x=0} &= \frac{\partial^2 F(y)}{\partial y^2}, \\ \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right)_{x=0} &= \frac{\partial^4 F(y)}{\partial y^4}, \\ \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_{x=0} &= \left(\frac{h}{a}\right)^2 \left\{ -\frac{\partial^2 F(y)}{\partial y^2} \cdot \frac{1}{y^2} \left[2 + \frac{k^2 \pi^2}{4}\right] + \frac{\partial F(y)}{\partial y} \cdot \frac{4}{y^3} \left[2 + \frac{k^2 \pi^2}{4}\right] \right. \\ &\quad \left. + \left(-6 F(y) \frac{1}{y^4}\right) \left[2 + \frac{k^2 \pi^2}{4}\right] \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

The derivatives of $F(y)$ are written as

$$\left. \begin{aligned} F_1' &= \frac{\pi}{h} y^2 \sin \frac{2\pi y}{h} + 2 y \sin^2 \frac{\pi y}{h}, \\ F_1'' &= 4 \frac{\pi}{h} y \sin \frac{2\pi y}{h} + \frac{2\pi^2}{h^2} y^2 \cos \frac{2\pi y}{h} + 2 \sin^2 \frac{\pi y}{h}, \\ F_1''' &= 24 \frac{\pi^2}{h^2} \cos \frac{2\pi y}{h} - 32 \frac{\pi^3}{h^3} y \sin \frac{2\pi y}{h} - 8 \frac{\pi^4}{h^4} y^2 \cos \frac{2\pi y}{h}, \\ F_2' &= y \left[\cos \frac{\pi y}{h} - \cos \frac{3\pi y}{h} \right] + \frac{y^2}{2} \left[-\frac{\pi}{h} \sin \frac{\pi y}{h} + \frac{3\pi}{h} \sin \frac{3\pi y}{h} \right], \\ F_2'' &= \frac{2\pi y}{h} \left[-\sin \frac{\pi y}{h} + 3 \sin \frac{3\pi y}{h} \right] + \left[\cos \frac{\pi y}{h} - \cos \frac{3\pi y}{h} \right] \\ &\quad + \left(-\frac{y^2 \pi^2}{2 h^2} \right) \left[\cos \frac{\pi y}{h} - 9 \cos \frac{3\pi y}{h} \right], \\ F_2''' &= \frac{6\pi^2}{h^2} \left[-\cos \frac{\pi y}{h} + 9 \cos \frac{3\pi y}{h} \right] + 4 y \frac{\pi^3}{h^3} \left[\sin \frac{\pi y}{h} - 27 \sin \frac{3\pi y}{h} \right] \\ &\quad + \left(+\frac{y^2 \pi^4}{2 h^4} \right) \left[\cos \frac{\pi y}{h} - 81 \cos \frac{3\pi y}{h} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

If equations (21) are substituted into equations (20) and the resulting derivatives are substituted into equation (1), there results

$$P \alpha_1 + Q \alpha_2 = 0, \quad \text{at } y = \frac{h}{2}; \quad R \alpha_1 + S \alpha_2 = 0, \quad \text{at } y = \frac{2h}{3}, \quad (22)$$

where

$$\left. \begin{aligned} P &= 118.435 \left(\frac{h}{a}\right)^4 k^2 T - 42.052 + 39.478 \left(\frac{h}{a}\right)^2 W - 0.25000 \beta, \\ Q &= 1736.350, \\ R &= 49.965 \left(\frac{h}{a}\right)^4 k^2 T + 627.583 + 19.742 \left(\frac{h}{a}\right)^2 W - 0.33333 \beta, \\ S &= -49.965 \left(\frac{h}{a}\right)^4 k^2 T - 1130.014 - 93.761 \left(\frac{h}{a}\right)^2 W + 0.33333 \beta \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

and where

$$\beta = \frac{q}{gD} \omega^2 h^4, \quad W = 2 + \frac{\pi^2 k^2}{4}, \quad T = 1 + 0.20562 k^2.$$

Values of β for various ratios of h/a may be obtained from the condition

$$\begin{vmatrix} P & Q \\ R & S \end{vmatrix} = 0.$$

Figure 1 gives of γ , where $\gamma = \beta^{1/2}$, for practical ranges of the parameter h/a . In the case of an equilateral triangle

$$\gamma = 72.41. \quad (24)$$

In order to check the above value, the lowest natural frequency for an equilateral triangular plate is determined by the finite difference method. An equilateral triangular mesh is used¹⁾. The difference equations that result from writing equation (1) in difference form may be written matrixly as

$$(A - \lambda I) W = 0, \quad (25)$$

where

A = matrix of coefficients of $\nabla^2 \nabla^2$ terms;

I = unit matrix;

$$\lambda = \frac{9q}{4gD} \frac{\omega^2 (s/n)^4}{4gD};$$

s = length of side of triangle;

n = number of subdivision points along a side of the triangle.

If one symmetric point is taken, $n = 4$, and the value of γ is found to be 42.31. If eight symmetric points are taken, $n = 10$, and the value of γ is found to be 65.85. Interpolation for a better value gives

$$\gamma_1 = \frac{(10)^2}{(10)^2 - (4)^2} \cdot 65.85 - \frac{(4)^2}{(10)^2 - (4)^2} \cdot 42.31 = 70.34. \quad (26)$$

There is about 3 percent difference between the above value and the value given by equation (24). The true answer should be between 72.41 and 70.34.

¹⁾ V. P. JENSEN, *Analyses of Skew Slabs*, Eng. Exp. Sta. Bull. No. 332, University of Illinois, p. 53 (1941).

It is seen that the solutions presented in Figure 1 appear to be quite reasonable and the simple curve should enable the engineer to determine rapidly the lowest natural frequency for clamped or simply supported isosceles triangular plates.

Zusammenfassung

Es werden Näherungswerte für die tiefsten Eigenfrequenzen gleichseitig dreieckiger Platten mit eingespannten und einfach gelagerten Rändern berechnet. Die Resultate sind für den praktischen Gebrauch graphisch dargestellt.

(Received: June 22, 1954.)

Durchgang von Explosionswellen durch unterkühlte Wolken

Von RAYMUND SÄNGER¹⁾ und FRITZ SPRING²⁾, Zürich

Die Verfechter des Einsatzes gewöhnlicher mit einem Sprengkopf versehener Raketen zur Bekämpfung der Hagelbildung schreiben deren hagelverhindernde Wirkung zum Teil den vom Explosionsherd ausgehenden Schallwellen zu. Durch die Erschütterung, die die unterkühlten Wassertröpfchen einer Wolke beim Durchgang der Schallwelle erleiden, soll diese das Gefrieren der unterkühlten Tröpfchen veranlassen und dadurch die Vereisung der Wolke erzwingen. Die Intensität einer von einer Explosion ausgehenden Explosionswelle nimmt aber, verstärkt durch die auftretende Absorption, mit der Entfernung rasch ab, so dass die Einleitung der Vereisung höchstens in der Nachbarschaft der Explosion allfällig erwartet werden könnte. Nach den heutigen Kenntnissen ist aber die Vereisung einer unterkühlten Wolke in erster Linie durch Zahl und Art der vorhandenen aktiven Gefrierkerne bedingt, so dass die der Explosionswelle zugeschriebene Wirkung nicht schlechthin verständlich wäre. Da schliesslich nur das Experiment entscheiden kann, wurden einige abklärende Testversuche durchgeführt.

In einer ersten Gruppe von Versuchen, die im Schiesskanal der Werkzeugmaschinenfabrik Oerlikon Bührle & Co. ausgeführt worden sind, ist in einer Kühltruhe durch Einhauchen von Atemluft eine unterkühlte Wolke von -15° erzeugt worden und hierauf Sprengkörper, bestehend aus einem Hexagon-Trotylgemisch (85/15) mit nur gasförmigen Verbrennungsprodukten, im Abstand von 5 m und erhöht gegenüber der Truhe zur Explosion gebracht worden. Bei allen drei Versuchen konnte man jeweils eine lebhafteste Bewegung der Wolke beobachten, die sich aber rasch beruhigte, doch waren nicht die geringsten Anzeichen einer Anreicherung der in einem Lichtstrahl gewöhnlich nur vereinzelt aufleuchtenden Eisteilchen wahrzunehmen. Erst nach 4–6 Minuten trat eine klar erkennbare Zunahme der Eisteilchen ein; diese Erscheinung kann aber ihre Erklärung darin haben, dass die Abgrenzungen des Schiesskanals stark mit dem vom Kugelfang herrührenden Quarzsand verseucht sind. Durch die Explosionswelle wird aber mindestens zum Teil der Quarzstaub in Bewegung versetzt, und nach Ablauf einiger Minuten könnten tatsächlich Quarzteilchen bis zur Truhe gewandert sein, wobei zu bedenken ist, dass Quarzteilchen ähnlich wie AgJ schon bei

¹⁾ ETH.

²⁾ Werkzeugmaschinenfabrik Oerlikon Bührle & Cie.

verhältnismässig hoher Temperatur sich gefrierkeimfähig zeigen. Bei zwei weiteren Versuchen wurde dem Sprengsatz noch Silberjodid in Pulverform beigegeben; zunächst verhielt sich die unterkühlte Wolke wie bei den ersten Versuchen, doch trat nach etwa 10 Sekunden unversehens ein starkes Anwachsen der Anzahl der Eisteilchen in Erscheinung, ein Zeichen dafür, dass aktiv sich erweisende AgJ-Teilchen die Kühltruhe erreicht haben müssen. Die geschilderten Ereignisse sind in einem Film festgehalten worden.

Da das dem Quarzstaub zugeschriebene nachträgliche Auftreten vereinzelter Eisteilchen eine Unsicherheit in die Beweisführung der Untersuchung bringt, sind in einer zweiten Gruppe die Versuche im Freien auf dem waldigen Vorgebäude des Gaslaboratoriums der EMPA wiederholt worden. Die unterkühlte Wolke wurde zunächst gegen die infolge der allgemeinen Luftbewegung auftretende Randturbulenz durch Überdecken der Kühltruhe mit einem dünnen Tuch geschützt. Sofort nach der Explosion ist jeweils dieses durch eine Glasplatte, die die Beobachtung erlaubte, ersetzt worden. Die Beobachtung allfälliger Eisteilchen erfolgte in einem Lichtstrahl unter etwa 45° Neigung zur Kühltruhenöffnung und mindestens während 10 Minuten. Die äusseren Abmessungen der Truhe sind 30×35×95 cm (Höhe). Während der Messungen herrschte leichter Westwind bei einer Lufttemperatur von etwa 15° C (11. August 1954).

Bei den ersten drei Versuchen erfolgte die Explosion in einem horizontalen Abstand von der Truhenummitte von rund 900 cm bzw. in einer Überhöhung gegenüber dem Truheneingang von etwa 330 cm; beim vierten Versuch von 280 cm bzw. von etwa 390 cm. Die Temperatur der unterkühlten Wolke war beim ersten, zweiten, dritten bzw. vierten Versuch –18, –19, –14 bzw. –19°. Die zugehörigen Angaben der Sprengkörper sind: 10 g Hexogen-Trotylgemisch; 10 g desselben; 25 g eines üblichen Hagelraketen Sprengsatzes (26,3% Al, 73,7% KClO₄), bzw. 2 g desselben. Trotzdem mindestens 10 Minuten beobachtet wurde, konnten keine Eisteilchen über das gelegentliche Auftreten vereinzelter Partikel festgestellt werden. Die Messungen bestätigen damit die zu Anfang ausgesprochene Mutmassung, dass die von einer Explosion des Sprengsatzes einer Rakete ausgehenden Schallwellen unterkühlte Wolken nicht zur Vereisung bringen, auch nicht in der Nachbarschaft des Explosionsherdes.

Summary

The passage of sound-waves through supercooled clouds was experimentally examined; no influence on the supercooled water droplets could be detected.

(Eingegangen: 15. November 1954.)

Buchbesprechungen – Book Reviews – Notices bibliographiques

Grundlagen der Elektronenoptik. Von W. GLASER (Springer-Verlag, Wien 1952), 699 S., 444 Abb., sFr. 124.-.

Die Elektronenoptik ist ein junger Wissenszweig der Elektronenphysik, bei dessen Aufbau seit Anfang der dreissiger Jahre Prof. GLASER durch seine umfangreichen theoretischen Arbeiten massgebend beteiligt war. So können wir das heute vorliegende Werk *Grundlagen der Elektronenoptik* als eine Rekrystallisation der seit über zwanzig Jahren geleisteten Arbeit betrachten. In der Tat konnte sich der Autor in der Darstellung seines Buches weitgehend auf eigene Original-

arbeiten stützen. Wir treffen auch hier eine klare und scharfe Präzision der Begriffe und eine konsequente Durchführung der Gedankengänge.

Das Buch zerfällt in drei Hauptabschnitte. Der erste Abschnitt, der die Hälfte des Buches umfasst, beschäftigt sich mit den Abbildungsfeldern und der Gaußschen Dioptrik. Ausgehend von den auf die Elektronen in elektrischen und magnetischen Feldern ausgeübten Kräften werden die Elektronenbahnen und ihre Eigenschaften behandelt, wobei von Anfang an der Anschluss an die Methoden der gewöhnlichen Lichtoptik über das Prinzip der kleinsten Wirkung gesucht wird.

Im zweiten Abschnitt des Buches wird der Boden der Gaußschen Dioptrik verlassen und die Abbildungsgesetze dritter Ordnung, die Seidelsche Dioptrik behandelt. Unter Heranziehung der Wirkungsfunktion (Eikonal) werden zuerst allgemeine Integralausdrücke für die Bildfehlerkonstanten des rotationssymmetrischen Feldes abgeleitet, um dann einzelne Bildfehler eingehend zu diskutieren. Anschliessend werden zwei Kapitel der Berechnung der Kustik gewidmet. Die beiden letzten Kapitel dieses Abschnittes beschäftigen sich mit den Ablenkfehlern und der Fokussierung der kreisförmigen Elektronenstrahlbündel.

Im dritten Abschnitt widmet sich der Autor der Behandlung der Stromdichteverteilung bei der elektronenoptischen Abbildung, insbesondere der Behandlung von Beugungs- und Interferenzerscheinungen, wozu man allein an Hand der wellenmechanischen Auffassung des Elektrons gelangt. Der Ausgangspunkt ist die Hamilton-Jacobische Differentialgleichung in einer verallgemeinerten Form, welche, mit dem Erhaltungssatz für Teilchenzahl kombiniert, sehr anschaulich zu der Schrödinger-Gleichung führt. Durch die Integration der Schrödinger-Gleichung für die paraxialen Strahlen wird die Möglichkeit einer objekt-treuen Abbildung auch wellenmechanisch nachgewiesen, um hierauf auch die Seidelsche Dioptrik wellenmechanisch zu begründen. Abschliessend folgt noch eine eingehende Behandlung des Auflösungsvermögens des Elektronenmikroskops.

Es ist dem Autor glänzend gelungen, die Methoden der theoretischen Elektronenoptik ausführlich darzustellen, was in dem Vorwort als ein erstes Ziel des Buches angegeben wird. Der zweite vom Autor ersehnte Zweck, dem Techniker ein Nachschlagewerk für die Dimensionierungsfragen der Elektronenstrahlgeräte zu bieten, ist nach der Auffassung des Referenten mit geringerem Erfolg erfüllt.

Für ein ernsthaftes Studium der theoretischen Elektronenoptik ist das Buch wärmstens zu empfehlen.

E. B. Baş

Elektromagnetische Strahlungsfelder. Von H. ZUHRT (Springer-Verlag, Berlin 1953). 473 S., 170 Abb., DM 53.50.

Dieses Buch behandelt vor allem die für die Nachrichtentechnik interessanten Fragen der Theorie der elektromagnetischen Wellenausbreitung. Es beginnt mit den Grundgleichungen der Elektrodynamik, führt über die Wellengleichung in verschiedenen Koordinatensystemen, optischen und energetischen Betrachtungen zu einem eingehenden Studium der heute bekannten Antennenarten. Diese werden von der Theorie her dargestellt und berechnet, die Berechnung jedoch so weit getrieben, dass sie auch für die Bedürfnisse des Praktikers unmittelbar nutzbringend ist. Die letzten Kapitel sind der Erfassung von allgemeineren Ausbreitungsbedingungen gewidmet (Erdkrümmung, Einfluss der Atmosphäre, Hindernisse). Ein ausführliches Literaturverzeichnis ist bis 1952 nachgeführt. Für die konsequente Anwendung des Giorgischen Maßsystems dürften dem Verfasser speziell die Studierenden dankbar sein.

Das Buch hat vor allem den Vorzug, Antennen- und Ausbreitungsfragen der verschiedensten Frequenzbereiche einheitlich und theoretisch sauber zusammenzufassen und gleichzeitig eine weitgehende Einführung in die mit einzelnen Wellenlängen verknüpften Spezialdisziplinen zu bieten. Dem wissenschaftlich interessierten Hochfrequenzingenieur dürfte es bald unentbehrlich werden. *T. Stutz*

Tensor Analysis, Theory and Applications. By I. S. SOKOLNIKOFF (John Wiley & Sons, New York, 1951). 335 pp., 43 Abb.; \$6.-.

Dieser in der von I. S. SOKOLNIKOFF herausgegebenen Sammlung «Applied Mathematics Series» erschienene Band ist aus Vorlesungen hervorgegangen, die der Verfasser während mehrerer Jahre an drei verschiedenen amerikanischen Universitäten gehalten hat. Das Buch kann Studenten der angewandten Mathematik, Physikern und Ingenieuren als Lehrbuch zur Einführung in die Theorie und Anwendung der Tensoranalysis sehr empfohlen werden. Es zeichnet sich durch eine geschickte und übersichtliche Darstellung aus; die Begriffe werden sorgfältig eingeführt und die gewonnenen allgemeinen Ergebnisse auf einfache, instruktive Beispiele angewandt. Jeder Abschnitt enthält Übungsaufgaben und gelegentlich Literaturhinweise für ein eingehenderes Studium. Auch die Ausstattung des Buches ist vorzüglich.

Das erste Kapitel enthält eine knappe Einführung in die lineare und quadratische Algebra und Matrizenrechnung, während das zweite sich mit der Tensoralgebra und der Tensoranalysis befasst (es wird die übliche Schreibweise und nicht die Kern-Index-Methode verwendet) und bis zum Riemannschen Krümmungstensor vordringt. Die vier folgenden Kapitel sind den Anwendungen gewidmet. Zunächst wird ziemlich ausführlich die Flächentheorie (innere und äussere) im E_3 behandelt und, soweit erforderlich, die Riemannsche Geometrie im R_n . Als dann folgt eine gute Darstellung der analytischen Mechanik, einschliesslich einiger Hinweise auf die Potentialtheorie. Im fünften Kapitel geht der Verfasser kurz auf die relativistische Mechanik ein und leitet hier die Schwarzschildsche (statische kugelsymmetrische) Lösung der Feldgleichungen ab, um die Periheldrehung einer Planetenbahn zu berechnen. Das letzte Kapitel vermittelt noch eine Idee von der Anwendung der Tensorrechnung in der Mechanik der Continua. Es wird der nichtlineare Fall dargestellt und sodann der Übergang zur klassischen Elastizitätstheorie und Hydrodynamik vollzogen. *E. Roth-Desmeules*

Die Laplace-Transformation und ihre Anwendung. Von P. FUNK, H. SAGAN und F. SELIG (Deuticke, Wien, 1953), 106 S., 18 Fig.; sFr. 10.-.

Es ist das Ziel der Verfasser gewesen, eine kurze Einführung in die Theorie und Anwendungen der Laplace-Transformation zu schreiben, die eine Mittelstellung einnehmen soll zwischen den für Mathematiker und den für Ingenieure geschriebenen Büchern. Diese vermittelnde Darstellung ist vorzüglich gelungen und sehr zu begrüssen, da einerseits die mathematischen Monographien der Laplace-Transformation für den Techniker oft zu schwer lesbar sind und andererseits die mehr auf die Anwendungen zielenden Lehrbücher – häufig noch von den alten Heavisideschen Operatorenrechnung inspiriert – es oft an mathematischer Strenge fehlen lassen.

Hervorgehoben seien die mathematisch einwandfreie Darstellung des Umkehrintegrals und der Asymptotik der Laplace-Transformierten sowie die knappen und das Wesentliche treffenden Einführungen in die Anwendungsgebiete (Elektrische Schwingungskreise, Wärmeleitung, Regelvorgänge, Stabilität).

E. Stiefel

Mathematical Aspects of the Quantum Theory of Fields. By K. O. FRIEDRICHS (Interscience Publishers, Inc., New York, 1953). 272 pp., \$5.00.

Der Autor sagt in der Einleitung, dass dieses aus fünf Teilen bestehende, auf Vorlesungen im Seminar über mathematische Physik an der New York University basierte Buch «in erster Linie an Mathematiker gerichtet sei, die mit den Grundbegriffen der Quantentheorie eines einzelnen Teilchens vertraut sind und die lernen wollen, welche mathematischen Begriffe in den einfachsten Problemen der Feld-Quantentheorie verwendet sind.»

Es ist klar, dass das selbst für einen theoretischen Physiker, der Spezialist in der Feldquantisierung ist, schwierig lesbare Buch nur auf einen sehr kleinen Kreis von Lesern rechnen kann. Obwohl das Buch nicht beansprucht, einen Fortschritt in den grundsätzlichen Fragen der Feldquantisierung zu bringen, muss dem Autor zugestanden werden, dass es hinsichtlich mathematischer Strenge eine gewisse Lücke in der bestehenden Literatur in nützlicher Weise ausfüllt. Dies gilt insbesondere hinsichtlich der konsequenten Vermeidung der Einführung eines Hohlraumes von endlichem Volumen mit Hilfe einer direkteren Verwendung der bekannten Darstellung der Feldoperatoren von V. Fock. Ausser der üblichen «Teilchendarstellung» der Feldoperatoren werden noch andere mathematische Darstellungsmöglichkeiten für diese Operatoren angegeben, deren physikalische Bedeutung vielleicht noch zu prüfen wäre.

Das Buch beschränkt sich auf den Fall linearer Feldgleichungen, wo noch keine wesentlichen Divergenzschwierigkeiten auftreten. Über den kräftefreien Fall hinausgehend, werden hierbei insbesondere auch noch die Felder gegebener Quellenverteilungen behandelt mit Berücksichtigung der Divergenzen der Störungstheorie bei kleinen Frequenzen («Ultrarotkatastrophe»). *W. Pauli*

Physikalisches Wörterbuch. Von W. H. WESTPHAL (Springer-Verlag, Berlin 1952). 1628 S., 1595 Textfig.; DM 148.-.

The book represents an encyclopedia in one volume covering the fundamentals of physics, together with related fields of mathematics, astrophysics, and engineering. It is a completely new work continuing the tradition of the *Handwörterbuch* by BERLINER and SCHEEL, the last edition of which appeared some twenty years ago. The book is mainly intended for physicists as a means of rapid information on subjects outside their own special field. There is no doubt that the *Wörterbuch* will satisfy a definite need in this respect.

The bulk of the material is arranged alphabetically in encyclopedic fashion. In addition, a concise history of physics is given in an appendix, followed by a number of tables of units and conversion factors, dimensional relations between the various electromagnetic systems, atomic weights, etc. A brief account of the more important astronomical numbers is also included. Finally, a list of physicists is given. It is obviously very difficult to select such a list and even within the stated selection rules there are inconsistencies, for example, WENTZEL and WIGNER are not included. Such a list of names and birth dates does not seem to be of any use and could well have been omitted altogether.

Any review of the large amount of material in the book, consisting of some 10,000 headings, will obviously be weighted by the interests of the reviewer. In general, the impression is very favorable indeed. The text is mostly clear and concise, the many illustrations excellent, and the information has been brought up to the date of the printing (1952) with the help of a short addendum. Thus, recent work on V-particles, the use of Cherenkov radiation for counting purposes, etc. is included. Experimental techniques are well described and technical details

often given. The ever increasing field of electronic measuring methods seems adequately covered.

It is clear that a book of this scope cannot be complete, and that certain omissions and some shortcomings in special fields will have to be tolerated. More serious omissions noticed by the reviewer are the following: The grand canonical ensemble and its use in fluctuation theory is not mentioned. The central limit theorem of probability theory, the generalized harmonic analysis of WIENER *et al.* are missing, and the probabilistic information concepts of SZILARD and SHANNON are not sufficiently covered. The discussions on the ergodic hypothesis, on the H -theorem, and on determinism could be extended and deepened. The heading 'Thermodynamics' does not do justice to the subject; to judge the merits of kinetic theory, statistical mechanics, and phenomenological thermodynamics in a general way is fruitless and very much time dependent. Compared with other sections dealing with hydrodynamics, the section on 'Turbulence' seems too brief and incomplete. Very little is included on non-linear vibration and especially a general concept such as limit cycles is missed. In some cases it is felt that the presentation could be improved by a combination of several subjects under a single heading: for example, the classification of differential equations into elliptic, parabolic, and hyperbolic types is not given in the section 'Partial Differential Equations', but separately. The concept of GREEN's function appears under the separate heading of 'Sturm-Liouville Differential Equations'. It would seem more economical and direct to combine the contents of these separate sections into an article on partial differential equations, with back references under the more specialized sections; this has been done in other subject matters such as, for example, 'Ultrasonics'.

Compared to the scope of the work this and similar criticism which can be raised appears, however, quite minor and unavoidable in a first edition. Paper, printing, etc. conform with the known high standards of Springer. A wide distribution, which the volume most certainly deserves, is probably only hampered by the necessarily high price.

H. W. Liepmann

Leitfaden der Nomographie. Von W. MEYER ZUR CAPELLEN (Springer-Verlag, Berlin, 1953), 178 S., sFr. 20.10.

Im ersten Teil dieses Werkes werden die theoretischen Grundlagen der Nomographie entwickelt, im zweiten sind sehr zahlreiche instruktive Beispiele und Anwendungen zusammengefasst und zum Teil bildlich dargestellt. Diese für ein Lehrmittel der praktischen Mathematik etwas eigenwillige Gliederung wird durch gelegentlich schon im theoretischen Teil eingestreute Beispiele aufgelockert.

Es ist dem Verfasser gelungen, in knappen 92 Seiten einen recht umfassenden Überblick über die in der Nomographie angewendeten Methoden zu geben, für den die Bezeichnung «Leitfaden» beinahe zu bescheiden klingt. Eingehender als üblich werden auch Fragen der Genauigkeit erörtert. Dem Praktiker wird die tabellarische Zusammenstellung zahlreicher Funktionstypen mit den zugehörigen Nomogrammformen wertvoll sein.

Zum vollen Verständnis des Werkes sind elementare Kenntnisse der Differentialrechnung, der analytischen und projektiven Geometrie notwendig. Auch die gelegentlich knappe Darstellung setzt eine gewisse Vertrautheit mit mathematischen Gedankengängen voraus. Das neue Buch gehört deshalb in erster Linie in die Hand des Akademikers technischer Richtung, der es als Einführung oder als Ergänzung zu einer Vorlesung schätzen wird.

E. Völlm

ELEKTRONENMIKROSKOPE
MIKROTOME
ELEKTRONENDIFFRAKTOGRAPHEN
HOCHSPANNUNGSOSZILLOGRAPHEN



TRÜB, TÄUBER · ZÜRICH

Theoretische Elektrotechnik

in vier Bänden. Von Prof. Dr. K. Kuhlmann, Zürich,

Bis jetzt sind lieferbar: **Band II**

Grundzüge der Theorie des Wechselstromkreises und des einphasigen Transformators

VIII und 175 Seiten mit 121 Figuren. Ganzleinen Fr. 27.55, broschiert Fr. 23.40 (1947).

Hauptabschnitte: Symbolische Darstellung stationärer Wechselströme – Geometrie der komplexen Zahlen, symbolische Ortskurventheorie – Theorie des einphasigen Wechselstromtransformators.

«Der vorliegende Band wird dem Studierenden eine gute Unterstützung im Studium sein. Auch der in der Praxis stehende Ingenieur, der Freude an einer theoretischen Wissensvertiefung hat, wird gerne zu diesem Werk greifen.» (Technische Rundschau.)

Band III

Grundzüge der Theorie elektrischer Maschinen

547 Seiten mit 328 Figuren. Ganzleinen Fr. 74.90, broschiert Fr. 68.65 (1951).

Hauptabschnitte: Allgemeines – Die Wirkungsweise der elektrischen Maschinen – Die Wicklungstechnik der modernen Maschinen – Erzeugung magnetischer Felder – Induktivitätsberechnung von Maschinenwicklungen – Induzierte elektromotorische Kräfte – Magnetische Energie und Drehmoment elektrischer Maschinen – Verluste in elektrischen Maschinen durch Strom- und Eisenwärme – Das Rechnen mit symmetrischen Komponenten.

«Wer in diesem Buch eine Theorie der elektrischen Maschinen sucht, wird sie finden. Über das bescheidene Vorwort „Grundzüge“ geht der Inhalt aber weit hinaus. Zwar sind die Hauptkapitel: Wirkungsweise der elektrischen Maschinen, Wicklungstechnik, Erzeugung magnetischer Felder, Induktivitätsberechnungen, induzierte elektromotorische Kräfte, magnetische Energie und Drehmoment elektrischer Maschinen, wirklich auf die Grundzüge abgestellt. Sie enthalten aber so viele Einzelheiten, dass der an der Theorie der Maschinen interessierte Ingenieur der Praxis kaum ein Problem aus dem Gebiet des Elektromaschinenbaues finden wird, auf das er hier nicht eine Antwort findet... Das ausgezeichnet ausgestattete Buch wird allen am Elektromaschinenbau interessierten Ingenieuren willkommen sein.» (Elektrotechnische Zeitschrift.)

Zu beziehen durch jede Buchhandlung. Fordern Sie bitte Spezialprospekte an!

BIRKHÄUSER VERLAG BASEL UND STUTTGART

elichés
in jeder Technik



SCHWITTER
A-G

BASEL / ZÜRICH